X-ENS 2024

Épreuve de mathématiques B, MP & MPI, quatre heures
(corrigé)

Première partie

1. (a) Notons S l'ensemble des solutions de (1). Le théorème de Cauchy linéaire assure que l'application suivante :

$$\Phi : \begin{cases} S & \rightarrow & \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \\ y & \mapsto & \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. En considérant l'image réciproque par Φ de la base canonique $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, on obtient une famille (y_1, y_2) vérifiant les conditions initiales de l'énoncé, et c'est une base de S (donc une famille génératrice en particulier) puisqu'un isomorphisme préserve les bases. D'où le résultat : $\mathrm{Vect}(y_1, y_2) = S$.

(b) Posons $W = y_1y_2' - y_1'y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ (c'est le wronskien de y_1 et y_2). L'application W est dérivable sur $\mathbb{R}$ parce que toutes les fonctions en présence le sont, et le déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne. De plus, comme y_1 et y_2 vérifient (1), on a :

$$W' = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -qy_1 & -qy_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Par conséquent W est une application constante sur $\mathbb{R}$, et d'après la question précédente elle est égale à 1 en 0. D'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = 1.$$

2. L'application $y_T : t \mapsto y(t+T)$ est bien entendu de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque y et $t \mapsto t+T$ le sont, et on a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_T''(t) = y''(t+T) = -q(t+T)y(t+T)$. Or q est T-périodique, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_T''(t) + q(t)y_T(t) = -q(t)y(t+T) + q(t)y_T(t) = 0,$$

ce qui démontre que y_T vérifie (1). Par la question 1.(a), l'application y_T est donc combinaison linéaire de y_1 et y_2 : soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $y_T = \alpha y_1 + \beta y_2$. En évaluant en 0 cette égalité, ainsi que celle obtenue par dérivation, on obtient : $y(T) = \alpha$, et : $y'(T) = \beta$. D'où le résultat :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t).$$

3. Nous allons montrer : $(a) \Leftrightarrow (b)$, et : $(a) \Leftrightarrow (c)$.
On note toujours S l'ensemble des solutions de (1). Remarquons qu'il existe une application non nulle y vérifiant (a) si et seulement si l'endomorphisme :

$$f : \begin{cases} S & \rightarrow & S \\ y & \mapsto & (y_T : t \mapsto y(t+T)) \end{cases}$$

admet μ pour valeur propre (le fait que ce soit un endomorphisme découle de la question précédente), si et seulement si : $\chi_f(\mu) = 0$. Or la question précédente permet d'écrire la matrice de f relativement à la base (y_1, y_2) :

$$\mathrm{M}_{(y_1,y_2)}(f) = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix},$$

et on en déduit :

$$\chi_f = X^2 - (y_1(T) + y_2'(T))X + (y_1(T)y_2'(T) - y_1'(T)y_2(T)) \overset{(q.\,1.(b))}{=} X^2 - (y_1(T) + y_2'(T))X + 1.$$

L'égalité $\chi_f(\mu) = 0$ équivaut alors exactement à (b). On a montré que (a) équivaut à (b).
Montrons à présent l'équivalence de (a) et (c). Supposons (a). Soit $y \in S$ non nulle telle que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t+T) = \mu y(t)$, et posons : $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = e^{-\lambda t} y(t)$. On a évidemment : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = e^{\lambda t} u(t)$. Vérifions que u est T-périodique. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t+T) = e^{-\lambda t} e^{-\lambda T} y(t+T) = e^{-\lambda t} \frac{1}{\mu} \cdot \mu y(t) = e^{-\lambda t} y(t) = u(t),$$

ce qu'il fallait démontrer. Ainsi (a) implique (c).
Réciproquement si (c) est vraie, alors la T-périodicité de u implique :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = e^{\lambda T} e^{\lambda t} u(t+T) = e^{\lambda T} e^{\lambda t} u(t) = \mu y(t),$$

et y est une solution non nulle de (1) par hypothèse : d'où (a).
On a achevé de démontrer l'équivalence des trois assertions.

4. (a) On note encore S l'ensemble des solutions de (E).
Remarquons que par les relations coefficients-racines, on a : $\mu_2 = \frac{1}{\mu_1} = e^{-\lambda T}$. Par la question précédente appliquée à $\mu_1 = e^{\lambda T}$ et $\mu_2 = e^{-\lambda T}$ (et plus précisément son assertion (c)), il existe des fonctions T-périodiques w_1 et w_2 telles que $z_1 : t \mapsto e^{\lambda t} w_1(t)$ et $z_2 : t \mapsto e^{-\lambda t} w_2(t)$ soient non nulles et solutions de (1). De plus, d'après l'assertion (a) de la question précédente (notre démonstration montre que la solution non nulle de (a) provient en fait de celle de (c)), z_1 et z_2 sont des vecteurs propres d'un endomorphisme associés à des valeurs propres différentes : ils sont donc linéairement indépendants dans S qui est un espace vectoriel de dimension 2. On en déduit que (z_1, z_2) est une base de S. Par conséquent, pour toute solution y de (1) il existe α et β tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \alpha z_1(t) + \beta z_2(t) = \alpha e^{\lambda t} w_1(t) + \beta e^{-\lambda t} w_2(t),$$

d'où le résultat.
Remarque. Contrairement à ce que peut laisser entendre la formulation de la question, les fonctions w_1 et w_2 ne dépendent pas de y.

(b) Je présume que l'énoncé veut l'existence d'une solution périodique NON NULLE (puisque $t \mapsto 0$ est évidemment solution et périodique sans hypothèse sur les racines du polynôme $X^2 - (y_1(T) + y_2'(T))X + 1$).
Si $\mu_1 = \mu_2$, alors toujours par les relations coefficients-racines on a : $\mu_1^2 = 1$, donc : $\mu_1 \in \{1, -1\}$. Or l'équivalence entre (b) et (a) de la question 3 montre que l'existence d'une solution $y \in S$ non nulle et T-périodique équivaut au fait que 1 soit valeur propre de $f : y \mapsto (t \mapsto y(t+T))$, c'est-à-dire à $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Ceci montre donc l'existence d'une solution non nulle et T-périodique dans ce premier cas.
Si $\mu_1 = \mu_2 = -1$, alors ce qu'on vient de dire assure qu'il n'existe pas de solution non nulle et T-périodique. En effet, si $y \in S$ est non nulle et vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t+T) = -y(t)$ (une telle fonction existe par l'assertion (a) de la question 3), alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t+2T) = y(t)$, donc $t \mapsto y(t+2T)$ est $2T$-périodique et c'est une solution non nulle de (1) par la question 2 (il suffit de réitérer le raisonnement de cette question).
Dans tous les cas, l'équation (1) admet une solution périodique non nulle dans $\mathrm{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Deuxième partie

5. (a) Soit γ l'application définie sur $[0,1]$ par $t \mapsto x_1 + t(x_2 - x_1)$. Son image est $[x_1, x_2]$ donc elle est à valeurs dans V (puisque V est convexe) et elle est de classe C^1. On en déduit que $h \circ \gamma$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, et on a :

$$h(x_2) - h(x_1) = \int_0^1 (h \circ \gamma)'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}h(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t,$$

donc par l'inégalité triangulaire :

$$\|h(x_2) - h(x_1)\| \leqslant \int_0^1 \|\mathrm{d}h(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \underbrace{\|\mathrm{d}h(\gamma(t))\|}_{\leqslant C} \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{=\|x_2 - x_1\|} \mathrm{d}t \leqslant C\|x_2 - x_1\|,$$

d'où le résultat.

(b) Considérons l'application définie sur U par :

$$h : x \mapsto x - f(x).$$

L'application h est de classe C^1 sur U en tant que différence de deux fonctions de classe C^1, et on a en particulier : $\mathrm{d}h(a) = \mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(a) = 0_{\mathrm{L}(E)}$. Comme $\mathrm{d}h$ est continue en a, on déduit de ce qui précède l'existence de $r > 0$ tel que : $\forall x \in U \cap \overline{\mathrm{B}(a,r)}$, $\|\mathrm{d}h(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$. Quitte à diminuer r, on peut même supposer $\overline{\mathrm{B}(a,r)} \subseteq U$ car U est ouvert. Alors, par la question précédente (avec $V = \overline{\mathrm{B}(a,r)}$ qui est bien convexe), on a :

$$\forall (x_1, x_2) \in \overline{\mathrm{B}(a,r)}^2, \quad \|h(x_1) - h(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Or, par l'inégalité triangulaire renversée :

$$\begin{aligned}\forall (x_1, x_2) \in \overline{\mathrm{B}(a,r)}^2, \quad \|h(x_1) - h(x_2)\| &= \|(x_1 - x_2) - (f(x_1) - f(x_2))\| \\ &\geqslant \|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\|,\end{aligned}$$

donc :

$$\forall (x_1, x_2) \in \overline{\mathrm{B}(a,r)}^2, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

d'où le résultat.

(c) Soient $x \in \mathrm{B}(a,r)$ et $h \in E$. On a : $\mathrm{d}f(x)h = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x+th) - f(x))$. Or par la question précédente, on a pour tout $t > 0$:

$$\|f(x+th) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{2}\|th\| = \frac{t}{2}\|h\|,$$

donc la limite du taux d'accroissement donne :

$$\|\mathrm{d}f(x)h\| \geqslant \frac{\|h\|}{2},$$

ce dont on déduit immédiatement que le noyau de $\mathrm{d}f(x)$ est trivial : si $\mathrm{d}f(x)h = 0$ alors $h = 0$ par propriété de séparation de la norme. Ainsi $\mathrm{d}f(x)$ est injective : d'où le résultat.

Autre démonstration. Si l'on regarde de plus près la résolution de la question précédente, on a montré :

$$\|\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(x)\| = \|\mathrm{d}h(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$$

et comme la norme d'opérateur $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative, cela implique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|(\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(x))^n\| \leqslant \|\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(x)\|^n \leqslant \frac{1}{2^n},$$

or la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ converge car $\frac{1}{2} < 1$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(x))^n$ converge absolument donc converge (rappelons que $\mathrm{L}(E)$ est de dimension finie). On a de plus, par continuité de la composition d'applications linéaires $(u, v) \mapsto u \circ v$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(x))^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{d}f(x) \circ (\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(x))^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{Id}_E - (\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(x))) \circ (\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(x))^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(x))^n - (\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(x))^{n+1}\Big) \\
&= \mathrm{Id}_E, && \text{(lien suite-série)}
\end{aligned}$$

et dans $\mathrm{L}(E)$ un inverse à droite est aussi un inverse à gauche (parce que E est supposé de dimension finie), donc $\mathrm{d}f(x)$ est inversible et on a :

$$(\mathrm{d}f(x))^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(x))^n.$$

6. (a) L'application g est continue par composition de $x \mapsto y_0 - f(x)$ (l'application f est en effet continue car de classe C^1) et de $\|\cdot\|$ (qui est continue car 1-lipschitzienne dans $(E, \|\cdot\|)$: comme on est en dimension finie, la continuité ne dépend pas de la norme). De plus $\overline{\mathrm{B}(a, r)}$ est une partie fermée et bornée de E qui est de dimension finie, donc c'est un compact : par le théorème des bornes atteintes, g admet un minimum global x_0 sur $\overline{\mathrm{B}(a, r)}$.

Montrons qu'en vérité ce minimum est atteint sur $\mathrm{B}(a, r)$. Si $x_0 \in \mathrm{B}(a, r)$, alors il n'y a rien à raconter. Si x_0 vérifie : $\|x_0 - a\| = r$, alors :

$$\|f(a) - y_0\| \leqslant \frac{r}{4} = \frac{\|x_0 - a\|}{4} \overset{(q.\,5.(b))}{\leqslant} \frac{\|f(x_0) - f(a)\|}{2} \leqslant \|f(x_0) - f(a)\|,$$

donc les valeurs absolues se simplifient ci-dessous lorsqu'on utilise l'inégalité triangulaire renversée :

$$\begin{aligned}
\|y_0 - f(x_0)\| = \|y_0 - f(a) + f(a) - f(x_0)\| &\geqslant \big|\|y_0 - f(a)\| - \|f(a) - f(x_0)\|\big| \\
&= \|f(a) - f(x_0)\| - \|y_0 - f(a)\| \\
&\geqslant \frac{\|a - x_0\|}{2} - \|y_0 - f(a)\| && (q.\,5.(b)) \\
&\geqslant \frac{r}{2} - \frac{r}{4} \\
&= \frac{r}{4} \\
&\geqslant \|y_0 - f(a)\|,
\end{aligned}$$

donc : $g(x_0) \geqslant g(a)$. Comme g atteint un minimum global en x_0, ce doit être une égalité, donc : $g(a) = g(x_0)$. On en déduit que g atteint ce minimum global en a, qui appartient évidemment à $\mathrm{B}(a, r)$: dans tous les cas, g atteint un minimum global en un point de $\mathrm{B}(a, r)$, d'où le résultat.

(b) Posons $u = y_0 - f(x_0)$ pour abréger. On a montré à la question 5.(c) que $\mathrm{d}f(x_0)$ est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie : il est donc bijectif. Soit $h \in E$ tel que : $\mathrm{d}f(x_0)h = u$. L'application $t \mapsto g(x_0 + th)$ est définie sur un voisinage de 0 et admet un minimum local en 0 : montrons qu'elle est dérivable en ce point. On a pour tout t au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} g(x_0+th) - g(x_0) &= \|u - \mathrm{d}f(x_0)\cdot th - \|th\|\varepsilon(th)\|^2 - \|u\|^2 \\ &= \|u - tu - \|th\|\varepsilon(th)\|^2 - \|u\|^2 \\ &= \|(1-t)u - \|th\|\varepsilon(th)\|^2 - \|u\|^2 \end{aligned}$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 et de limite nulle en ce point. Or, par l'inégalité triangulaire (classique et renversée), on a pour tout t au voisinage de l'origine :

$$\begin{aligned} (1-t)^2\|u\|^2 - 2|1-t|\|u\|\|th\|\|\varepsilon(th)\| + \|th\|^2\|\varepsilon(th)\|^2 &\leqslant \|(1-t)u - t\|h\|\varepsilon(th)\|^2 \\ &\leqslant (1-t)^2\|u\|^2 + 2|1-t|\|u\|\|th\|\|\varepsilon(th)\| + \|th\|^2\|\varepsilon(th)\|^2, \end{aligned}$$

donc, pour tout t non nul au voisinage de l'origine :

$$\begin{aligned} (-2+t)\|u\|^2 - 2|1-t|\|u\|\frac{\|th\|\|\varepsilon(th)\|}{t} + t\|h\|^2\|\varepsilon(th)\|^2 &\leqslant \frac{g(x_0+th)-g(x_0)}{t} \\ &\leqslant (-2+t)\|u\|^2 + 2|1-t|\|u\|\frac{\|th\|\|\varepsilon(th)\|}{t} + t\|h\|^2\|\varepsilon(th)\|^2 \end{aligned}$$

On vérifie que les deux extrémités de l'encadrement tendent vers $-2\|u\|^2$. Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(x_0+th)-g(x_0)}{t} = -2\|u\|^2,$$

ce qui montre que g admet une dérivée en x_0 dans la direction h, qui vaut : $D_h g(x_0) = -2\|u\|^2 = -2\|y_0 - f(x_0)\|^2$. Mais $t \mapsto g(x_0+th)$ admet un extremum local en x_0 d'après ce qu'on a raconté plus haut : on a donc $D_h g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $y_0 = f(x_0)$ par propriété de séparation de la norme. D'où le résultat.

Autre démonstration dans un cas particulier. Supposons que $\|\cdot\|$ est euclidienne, associée à un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (par équivalence des normes, il n'aurait rien coûté de se placer dans ce cadre-là d'emblée, mais l'énoncé n'y invite pas). Alors $\|\cdot\|^2$ est de classe C^1 sur E, par composition de l'application linéaire $h \mapsto (h,h)$ et de l'application bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On a en outre, par la règle de la chaîne :

$$\forall (x,h) \in E^2, \quad \mathrm{d}\|\cdot\|^2(x)h = \langle x,h\rangle + \langle h,x\rangle = 2\langle x,h\rangle.$$

En tant que composition d'applications de classe C^1, l'application g est aussi de classe C^1. Comme g atteint un minimum en x_0 sur $\mathrm{B}(a,r)$, qui est un ouvert, le point x_0 est un point critique. On a : $\mathrm{d}g(x_0) = 0$. Or par la règle de la chaîne :

$$0 = \mathrm{d}g(x_0) = -\mathrm{d}\|\cdot\|^2(y - f(x_0)) \circ \mathrm{d}f(x_0),$$

et on a montré à la question 5.(c) que $\mathrm{d}f(x_0)$ est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie : il est donc inversible. Composer l'égalité précédente par son inverse donne :

$$\mathrm{d}\|\cdot\|^2(y - f(x_0)) = 0.$$

C'est-à-dire :

$$\forall h \in E, \quad 2\langle y - f(x_0), h\rangle = 0.$$

On en déduit, pour $h = y - f(x_0)$, que $\|y - f(x_0)\|^2 = 0$, donc : $y = f(x_0)$, d'où le résultat si $\|\cdot\|$ est euclidienne.

7. (a) L'application $h : y \mapsto \|y - f(a)\|$ est continue par continuité de la norme, donc $W = h^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{r}{4}\right]\right)$ est l'image réciproque d'un intervalle ouvert par une application continue : c'est un ouvert.

   En tant qu'intersection finie d'ouverts, V est aussi un ouvert.

   (b) La question 6 montre que $f_{|V}$ est surjective : en effet, si $y \in W$, alors en particulier $\|y_0 - f(a)| \leqslant \frac{r}{4}$, et par ce qui précède il existe $x_0 \in \mathrm{B}(a, r)$ tel que : $f(x_0) = y_0$. Comme $y_0 \in W$, on a bien sûr $x_0 \in f^{-1}(W)$, donc $x_0 \in \mathrm{B}(a, r) \cap W = V$, donc tout $y_0 \in W$ admet bien un antécédent dans V par f.

   De plus la question 5.(b) montre que $f_{|V}$ est injective : si $x_1, x_2 \in V$ vérifient $f(x_1) = f(x_2)$, alors on a $x_1, x_2 \in \mathrm{B}(a, r)$ par définition de V, ce qui permet d'appliquer la question 5.(b), et on en déduit : $0 \leqslant \|x_1 - x_2\| \leqslant 2\|f(x_1) - f(x_2)\| = 0$, d'où : $x_1 = x_2$.

   Enfin $f_{|V}$ est continue puisque f est de classe C^1. Il reste à justifier que la bijection réciproque de $f_{|V} : V \to W$ est continue. Notons ABUSIVEMENT $f^{-1} : W \to V$ cette réciproque, par commodité. Nous allons montrer que f^{-1} est lipschitzienne. Soit $y_1, y_2 \in W$. On applique la question 5.(b) avec $x_1 = f^{-1}(y_1) \in \mathrm{B}(a, r)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2) \in \mathrm{B}(a, r)$. On obtient :

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leqslant 2\|f(f^{-1}(y_1)) - f(f^{-1}(y_2))\| = 2\|y_1 - y_2\|,$$

   ce qui montre bien que f^{-1} est 2-lipschitzienne donc continue sur W : cela achève de répondre à cette question.

Troisième partie

8. (a) Tout d'abord, $\mathbb{C}[A]^*$ est par définition une partie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, non vide puisque I_n y appartient (on peut l'écrire sous la forme $\mathrm{I}_n = P(A)$ avec $P = 1 \in \mathbb{C}[X]$). Montrons sa stabilité par produit et par inverse. Celle par inverse est évidente : si $B \in \mathbb{C}[A]^*$ alors, par définition de cet ensemble, on a d'une part $B^{-1} \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et d'autre part : $(B^{-1})^{-1} = B \in \mathbb{C}[A]$.

   Pour la stabilité par produit : si $(B, C) \in \mathbb{C}[A]^*$, et si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ sont tels que $B = P(A)$ et $C = Q(A)$, alors $BC = (PQ)(A) \in \mathbb{C}[A]$, et de plus BC est inversible en tant que produit de matrices inversibles, donc $BC \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. En raisonnant comme pour BC, on montre que $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ est dans $\mathbb{C}[A]$ grâce au fait que ce soit le cas pour B^{-1} et C^{-1}.

   Tout cela montre le résultat voulu.

   (b) L'inclusion directe est évidente par définition de $\mathbb{C}[A]^*$. Montrons donc l'inclusion réciproque. Soit $B \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La seule subtilité est de montrer que B^{-1} est un polynôme en B. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a : $\chi_B(B) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, or le coefficient constant de χ_B est non nul (c'est le déterminant de B au signe près), ce qui permet de l'écrire : $\chi_B = XP + a_0$, avec $a_0 = (-1)^n \det(B) \neq 0$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. L'égalité $\chi_B(B) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ peut alors se réécrire :

$$\mathrm{I}_n = -\frac{1}{a_0} P(B) \cdot B.$$

   On en déduit : $B^{-1} = -\frac{1}{a_0} P(B) \in \mathbb{C}[A]$, d'où : $B \in \mathbb{C}[A]^*$. On a montré l'inclusion : $\mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}[A]^*$. D'où l'égalité.

9. Soit $B \in \mathbb{C}[A]$. On veut montrer : $\exp(B) \in \mathbb{C}[A]^*$. Tout d'abord, on sait que l'exponentielle d'une matrice est toujours inversible, donc par la question précédente il suffit de montrer que $\exp(B)$ est dans $\mathbb{C}[A]$. On a par définition :

$$\exp(B) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k,$$

ce qui montre que $\exp(B)$ est limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{C}[A]$. Or $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, donc c'est un fermé : il est donc stable par passage à la limite et on en déduit que $\exp(B)$ appartient à $\mathbb{C}[A]$.

Ainsi : $\exp(B) \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[A]^*$, d'où le résultat.

10. (a) Soient (t, a) et (t', a') dans $]0,1[\times\mathbb{R}$. On suppose : $Z_a(t) = Z_{a'}(t')$. C'est-à-dire :

$$t + iat(1-t) = t' + iat'(1-t').$$

Identifions parties réelles et parties imaginaires. On obtient : $t = t'$, et : $at(1-t) = a't(1-t)$. Comme $t(1-t) \neq 0$ pour $t \in]0,1[$, cela donne $a = a'$, d'où : $(t, a) = (t', a')$, démontrant l'injectivité.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons : $\forall t \in [0,1]$, $M(t) = Z_a(t)M_1 + (1 - Z_a(t))\, M_2$. C'est un élément de $\mathbb{C}[A]$ pour tout $t \in [0,1]$, puisqu'il est combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{C}[A]$. La subtilité est de montrer son appartenance à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour tout $t \in [0,1]$ *via* un bon choix de a. Pour cela, considérons l'application :

$$f : t \mapsto \det\left(tM_1 + (1-t)\, M_2\right).$$

Comme le déterminant est polynomial en les coefficients d'une matrice, cette application est polynomiale en t, non nulle en 0 et 1 puisque $f(0) = \det(M_2) \neq 0$ et $f(1) = \det(M_1) \neq 0$ (en effet M_1 et M_2 sont inversibles par hypothèse). Elle admet donc un nombre fini de racines, et ces racines sont distinctes de 0 et 1.

Or si $(t, a) \in]0,1[\times\mathbb{R}$, on a :

$$f(Z_a(t)) = 0 \Longleftrightarrow Z_a(t) \in f^{-1}(\{0\}),$$

et comme $(t, a) \mapsto Z_a(t)$ est injective sur $]0,1[\times\mathbb{R}$, chaque élément de l'ensemble fini $f^{-1}(\{0\})$ a au plus un antécédent par cette application, donc $f(Z_a(t)) = 0$ n'est possible que pour un nombre fini de valeurs de (t, a). Si on les note $(t_1, a_1), \ldots, (t_k, a_k)$, alors il suffit de prendre n'importe quel réel $a \in \mathbb{R}$ distinct de $a_1, \ldots, a_k$ pour avoir le résultat voulu. En effet, par construction de a on a : $f(Z_a(t)) \neq 0$ pour tout $t \in]0,1[$, et si $t = 0$ ou $t = 1$ on a :

$$f(Z_a(0)) = \det(M_2) \neq 0, \quad f(Z_a(1)) = \det(M_1) \neq 0,$$

donc $M(t) = Z_a(t)M_1 + (1 - Z_a(t))\, M_2$ est inversible pour tout $t \in [0,1]$: ce qu'il fallait démontrer. On a bien :

$$\forall t \in [0,1], \quad M(t) = Z_a(t)M_1 + (1 - Z_a(t))\, M_2 \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[A]^*.$$

(c) On reprend le réel a de la question précédente. L'application $t \mapsto Z_a(t)$ est continue car polynomiale, donc l'application $t \mapsto M(t)$ est continue aussi, à valeurs dans $\mathbb{C}[A]^*$ et vérifie : $M(0) = M_2$, $M(1) = M_1$. Cela montre que M_1 et M_2 sont reliés dans $\mathbb{C}[A]^*$ par un chemin continu. Cela vaut pour tout couple d'éléments de $\mathbb{C}[A]^*$, donc $\mathbb{C}[A]^*$ est connexe par arcs.

11. (a) On va appliquer le théorème d'inversion locale simplifié démontré dans la deuxième partie. Pour cela, encore faut-il que l'application définie sur $\mathbb{C}[A]$ par $B \mapsto \exp(B)$ soit de classe C^1 au voisinage de $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ et de différentielle en $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ égale à l'identité. C'est ce que nous allons démontrer.

Commençons par obtenir la différentiabilité de l'exponentielle en $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$. Considérons une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}[A]$ (la boule ouverte ci-dessous est aussi dans $\mathbb{C}[A]$). On a :

$$\forall H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad \exp(H) = \mathrm{I}_n + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k,$$

or on a, par inégalité triangulaire et sous-multiplicativité :

$$\forall H \in \mathrm{B}(0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}, 1), \quad \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \right\| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} \leqslant \|H\|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \|H\|^2 e^1,$$

donc :

$$\exp(H) = \exp(0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}) + H + \underset{H \to 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}}{O}\left(\|H\|^2\right) = \exp(0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}) + H + \underset{H \to 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}}{o}\left(\|H\|\right).$$

Comme $H \mapsto H$ est linéaire, cette égalité démontre que l'exponentielle est différentiable en $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ et que : $\forall H \in \mathbb{C}[A]$, $\mathrm{d}\exp(0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})})H = H$.

À présent, montrons la différentiabilité en $B \in \mathbb{C}[A]$ quelconque. On se ramène au cas précédent par translation, ce qui est possible parce que $\exp : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[A]^*$ est un morphisme de groupes (grâce à la commutativité de l'algèbre $\mathbb{C}[A]$: c'est elle qui permet d'écrire que $\exp(B+C) = \exp(B)\exp(C)$ pour tout couple $(B, C) \in \mathbb{C}[A]^2$ et c'est très important). On a, pour $H \in \mathbb{C}[A]$ au voisinage de l'origine :

$$\begin{aligned}\exp(B+H) = \exp(B)\exp(H) &= \exp(B)\left(\mathrm{I}_n + H + \underset{H \to 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}}{o}\left(\|H\|\right)\right) \\ &= \exp(B) + \exp(B)H + \underset{H \to 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}}{o}\left(\|H\|\right),\end{aligned}$$

et comme $H \mapsto \exp(B)H$ est linéaire, il en résulte la différentiabilité en B, et :

$$\forall B \in \mathbb{C}[A], \quad \forall H \in \mathbb{C}[A], \quad \mathrm{d}\exp(B)H = \exp(B)H.$$

Ainsi $\exp : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[A]^*$ est différentiable en tout point de $\mathbb{C}[A]$, et est de classe C^1 sur $\mathbb{C}[A]$ puisque $B \mapsto (\mathrm{d}\exp(B) : H \mapsto \exp(B)H)$ est la composition des applications continues :

$$\begin{cases} \mathbb{C}[A] & \to & \mathbb{C}[A] \\ B & \mapsto & \exp(B) \end{cases}, \quad \text{et :} \quad \begin{cases} \mathbb{C}[A] & \to & \mathrm{L}(\mathbb{C}[A]) \\ M & \mapsto & (H \mapsto MH) \end{cases},$$

la continuité de la seconde application découlant de sa linéarité.

De plus : $\mathrm{d}\exp(0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[A]}$, donc par le résultat de la deuxième partie il existe un ouvert U de $\mathbb{C}[A]$ contenant $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ et un ouvert V de $\mathbb{C}[A]$ contenant $\exp\left(0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}\right) = \mathrm{I}_n$ tels que la fonction exponentielle induise une bijection continue de $U \subseteq \mathbb{C}[A]$ sur V dont la réciproque est une fonction continue sur V : d'où le résultat.

(b) On reprend les notations de la question précédente. On a : $V = \exp(U) \subseteq \mathbb{C}[A]$, et c'est un ouvert puisque c'est l'image réciproque par une application continue (une image directe est une image réciproque de bijection réciproque !) d'un ouvert. Ainsi il existe un voisinage de I_n inclus dans $\mathbb{C}[A]$, donc I_n est un point intérieur à $\mathbb{C}[A]$.

Déduisons-en que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$. Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$. Introduisons $B \in \mathbb{C}[A]$ tel que : $M = \exp(B)$. On veut montrer que M est intérieur à $\exp(\mathbb{C}[A])$. L'idée est de se ramener au cas précédent par « translation » (au sens multiplicatif ici). Comme I_n est intérieur à $\mathbb{C}[A]$, on a en effet l'existence de $r > 0$ tel que : $\mathrm{B}(\mathrm{I}_n, r) \subseteq \exp(\mathbb{C}[A])$; or, si $M' \in \mathrm{B}\left(M, r/\|M\|^{-1}\right)$, alors :

$$\left\|M'M^{-1} - \mathrm{I}_n\right\| \leqslant \left\|M^{-1}\right\| \|M' - M\| < r,$$

donc : $M'M^{-1} \in \mathrm{B}(\mathrm{I}_n, r) \subseteq \exp(\mathbb{C}[A])$. On en déduit qu'il existe $B' \in \mathbb{C}$ tel que : $M'M^{-1} = \exp(B')$, puis :

$$M' = \exp(B')M = \exp(B')\exp(B) = \exp(B' + B) \in \exp(\mathbb{C}[A]),$$

la dernière égalité étant vraie parce que les éléments de $\mathbb{C}[A]$ commutent (raisonnement clé, qui justifie presque à lui seul pourquoi l'étude est faite dans $\mathbb{C}[A]$ au lieu de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$).

En posant $r' = r/\|M\|^{-1} > 0$, on a donc montré : $\mathrm{B}(M, r') \subseteq \exp(\mathbb{C})$. Ceci vaut pour tout $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$, donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]$.

12. La question précédente montre que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$, donc aussi un ouvert de $\mathbb{C}[A]^*$ (par définition de la topologie induite) puisque $\exp(\mathbb{C}[A]) = \exp(\mathbb{C}[A]) \cap \mathbb{C}[A]^*$.

Déduisons-en que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $\mathbb{C}[A]^*$. Comme l'exponentielle est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}[A], +)$ dans $(\mathbb{C}[A]^*, \times)$ (le fait que ce soit un morphisme utilise encore une fois la commutativité de l'algèbre $\mathbb{C}[A]$), son image $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}[A]^*$. Comme $\mathbb{C}[A]^*$ est une réunion disjointe de ses classes d'équivalence pour la relation d'équivalence associée au sous-groupe $\exp(\mathbb{C}[A])$, c'est-à-dire celle définie par :

$$\forall (M, M') \in (\mathbb{C}[A]^*)^2, \quad M \sim M' \iff M^{-1}M' \in \exp(\mathbb{C}[A]),$$

on a la réunion disjointe suivante :

$$\mathbb{C}^* = \bigsqcup_{M \in X} M \exp(\mathbb{C}[A]) = \exp(\mathbb{C}[A]) \sqcup \bigsqcup_{M \in X \setminus \{\mathrm{I}_n\}} M \exp(\mathbb{C}[A]),$$

où X est un système complet de représentants des classes pour cette relation d'équivalence (et en prenant I_n pour représentant de la classe de I_n). On en déduit :

$$\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^* \setminus \bigcup_{M \in X \setminus \{\mathrm{I}_n\}} M \exp(\mathbb{C}[A]).$$

Ainsi $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé dans $\mathbb{C}[A]^*$ puisque c'est le complémentaire d'une réunion d'ouverts (qui est donc un ouvert). Le fait que $M \exp(\mathbb{C}[A])$ soit un ouvert pour tout $M \in X \setminus \{\mathrm{I}_n\}$ découle du fait que ce soit l'image réciproque de $\exp(\mathbb{C}[A])$ par l'application $M' \mapsto M'M^{-1}$, qui est évidemment continue.

13. (a) Soit f la fonction indicatrice de $\mathbb{C}[A]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$, c'est-à-dire :

$$f : M \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } M \notin \exp(\mathbb{C}[A]), \\ 0 & \text{si } M \in \exp(\mathbb{C}[A]). \end{cases}$$

On a par hypothèse : $f(M_1) = 0$, et : $f(M_2) = 1$. Montrons que f est continue en montrant que l'image réciproque de tout fermé de $\{0, 1\}$ est un fermé de $\mathbb{C}[A]^*$. On a :

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,\ f^{-1}(\{0\}) = \exp(\mathbb{C}[A]),\ f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{C}[A]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A]),\ f^{-1}(\{0, 1\}) = \mathbb{C}[A]^*.$$

D'après les deux questions précédentes, toutes ces images réciproques sont des fermés (en effet le complémentaire d'un ouvert est un fermé). Donc f est continue sur $\mathbb{C}[A]^*$: d'où le résultat.

(b) Comme $f : \mathbb{C}[A]^* \to \mathbb{R}$ est continue et $\mathbb{C}[A]^*$ connexe par arcs par la question 10.(c), l'image directe $f(\mathbb{C}[A]^*) = \{0, 1\}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Or une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$ est un intervalle : c'est absurde.

Par l'absurde, on a montré : $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^*$.

14. On sait déjà que l'on a : $\exp(\mathrm{M}_n(\mathbb{C})) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Réciproquement, soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $A \in \mathbb{C}[A]^*$, donc par la question précédente il existe $B \in \mathbb{C}[A]$ tel que : $A = \exp(B)$. Comme $\mathbb{C}[A]$ est inclus dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a bien : $A \in \exp(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$.

D'où l'inclusion réciproque et l'égalité : $\exp(\mathrm{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Quatrième partie

15. En raisonnant comme dans la question 2, on montre que l'application :

$$f : Y \mapsto (Y_T : t \mapsto Y(t+T))$$

est un endomorphisme de $\mathscr{S}$, qui est de dimension finie égale à n par le théorème de Cauchy linéaire. Or tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie admet au moins une valeur propre, puisque son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$ par le théorème fondamental de l'algèbre, et 0 ne peut pas être valeur propre puisque cet endomorphisme est inversible, d'inverse $Y \mapsto (t \mapsto Y(t-T))$. Il existe donc au moins une valeur propre non nulle de f. Notons-la $\mu \in \mathbb{C}^*$. Si $Y \in \mathscr{S}$ est un vecteur propre associé, l'égalité $f(Y) = \mu Y$ signifie que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t+T) = \mu Y(t),$$

d'où le résultat.

16. (a) Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Soit $t \in \mathbb{R}$. On sait, grâce à l'image de l'isomorphisme du théorème de Cauchy linéaire :

$$\Phi_t : \begin{cases} \mathscr{S} & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \\ Y & \mapsto & Y(t) \end{cases}$$

que $\Phi_t((Y_1, \ldots, Y_n)) = (Y_1(t), \ldots, Y_n(t))$ est une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, donc $M(t)$ est inversible. Cela vaut pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où le résultat. De plus, en dérivant M composante par composante, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M'(t) = \mathrm{M}_{(E_1,\ldots,E_n)}((Y_1'(t), \ldots, Y_n'(t)) = \mathrm{M}_{(E_1,\ldots,E_n)}((A(t)Y_1(t), \ldots, A(t)Y_n(t)).$$

Les règles de calcul dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ permettent de reconnaître là le produit matriciel $A(t)\mathrm{M}_{(E_1,\ldots,E_n)}((Y_1(t), \ldots, Y_n(t))$, d'où le résultat : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M'(t) = A(t)M(t)$.

(b) Justifions d'abord que l'application $M^{-1} : t \mapsto M(t)^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (M(t))^{-1} = \frac{1}{\det(M(t))}\mathrm{Com}(M(t))^\top.$$

Or $\det(M)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car M l'est et le déterminant est n-linéaire par rapport aux colonnes, et tous les cofacteurs $t \mapsto M_{i,j}(t)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque ce sont des déterminants de matrices à coefficients de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc $\mathrm{Com}(M)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ composante par composante. Par linéarité de la transposition, il en est de même de $\mathrm{Com}(M)^\top$. En tant que produit de fonctions de classe C^1 (notons que $\det(M)$ ne s'annule pas), l'application M^{-1} est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Pour calculer sa dérivée, il suffit de dériver la relation $M^{-1}M = \mathrm{I}_n$ (le membre de gauche est dérivable puisque M et M^{-1} le sont, tandis que l'application $(A,B) \mapsto AB$ est bilinéaire). On obtient :

$$(M^{-1})'M + M^{-1}M' = 0_{\mathrm{M}_n(K)},$$

donc : $(M^{-1})' = -M^{-1}M'M^{-1}$.

Tout cela est fait en vue de démontrer que la dérivée de $f : t \mapsto (M(t))^{-1}M(t+T)$ est nulle. L'application f est dérivable par des arguments semblables à ceux ci-dessus, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = -M(t)^{-1}M'(t)M(t)^{-1}M(t+T) + M(t)^{-1}M'(t+T).$$

Or, par la question précédente : $M' = AM$, et on sait que A est T-périodique. On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = -M(t)^{-1}A(t)M(t+T) + M(t)^{-1}A(t)M(t+T) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}.$$

Ainsi f est de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc f est constante : d'où le résultat.

(c) Par la question précédente, il existe $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ M(t)^{-1}M(t+T) = C$. De plus C est inversible en tant que produit de matrices inversibles (question 16.(a)), donc $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. D'après le résultat de la troisième partie, il existe $B' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tel que : $C = \exp(B')$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t+T) = M(t)\exp\left(T\left(\frac{1}{T}B'\right)\right),$$

d'où le résultat en posant $B = \frac{1}{T}B'$.

(d) Il suffit de poser $Q(t) = M(t)\exp(-tB)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ puis d'imiter le raisonnement de la question 3 (implication $(a) \Rightarrow (c)$). Comme $Q(t)$ est un produit de matrices inversibles pour tout t réel, Q est bien à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

17. (a) Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Vérifions d'abord que les Z_i sont dans $\mathscr{S}$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Par linéarité de l'application $A \mapsto APE_i$, on a :

$$Z_i' = M' \cdot PE_i = AMPE_i = AZ_i,$$

donc Z_i vérifie (2).

De plus, en suivant le raisonnement de la question 16.(a), on sait que la famille $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ est une base de $\mathscr{S}$ si et seulement si $(Z_1(0), Z_2(0), \ldots, Z_n(0))$ est une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$: c'est bien le cas puisqu'il s'agit des colonnes de la matrice inversible $M(0)P$. D'où le résultat.

(b) Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$Z_k(t) = M(t)PE_k = Q(t)\exp(tB)PE_k = Q(t)\exp(tD + tN)PE_k,$$

et comme D et N commutent d'après le résultat admis, on a :

$$\begin{aligned} Z_k(t) = Q(t)\exp(tN)\exp(tD)PE_k &= Q(t)\exp(tN)P\exp(t\Delta)P^{-1}PE_k \\ &= Q(t)\exp(tN)P\exp(t\Delta)E_k \\ &= Q(t)\exp(tN)Pe^{t\lambda_k}E_k. \end{aligned}$$

Or N est nilpotente d'ordre n (donc aussi d'indice de nilpotence au plus n). On en déduit :

$$Q(t)\exp(tN)PE_k = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!}Q(t)N^iPE_k = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!}R_{i,k}(t).$$

En injectant cette expression plus haut, on trouve enfin :

$$Z_k(t) = e^{t\lambda_k}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!}R_{i,k}(t).$$

Il reste à vérifier que les applications $R_{i,k}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques. Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. La continuité de $R_{i,k}$ découle de celle de M (composante par composante, puisque les Y_i sont de classe C^1) et de celle de l'application linéaire $A \mapsto \frac{1}{i!}AN^iPE_i$. La périodicité découle d celle de Q : d'où le résultat.

(c) Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est bornée. L'argument est classique : on utilise le théorème des bornes atteintes pour produire un majorant de la norme de cette fonction sur $[0, T]$, puis par translation on montre que ce majorant vaut sur $\mathbb{R}$. Ainsi les fonctions $R_{i,k}$ sont toutes bornées. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (i,k) \in [\![0, n-1]\!] \times [\![1, n]\!]$, $\|R_{i,k}\|_\infty \leqslant M$. On a :

$$\forall (i,k) \in [\![0, n-1]\!] \times [\![1, n]\!], \quad 0 \leqslant \left\|e^{t\lambda_k}\frac{t^i}{i!}R_{i,k}(t)\right\| \leqslant \frac{M}{i!}t^ie^{t\mathrm{Re}(\lambda_k)},$$

et comme on a par hypothèse : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$, par le théorème des croissances comparées : $\lim\limits_{t \to +\infty} t^i e^{t\mathrm{Re}(\lambda_k)} = 0$. Par le théorème des gendarmes :

$$\forall (i,k) \in [\![0, n-1]\!] \times [\![1, n]\!], \quad \lim_{t \to +\infty} e^{t\lambda_k} \frac{t^i}{i!} R_{i,k}(t) = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}.$$

Il découle alors de la question 17.(b) que l'on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lim_{t \to +\infty} Z_k(t) = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}.$$

Puisque, pour les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, la limite peut se calculer composante par composante, on en déduit :

$$\lim_{t \to +\infty} M(t)P = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}.$$

Concluons : soit Y une solution de (2). Comme $\mathscr{S}$ est engendré par les colonnes de M, il existe $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = M(t)X = M(t)P(P^{-1}X)$. Or on vient de voir que $M(t)P$ tend vers la matrice nulle lorsque $t \to +\infty$. Par continuité du produit matriciel, on a : $\lim\limits_{t \to +\infty} Y(t) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \times (P^{-1}X) = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, ce qu'il fallait démontrer.

18. (a) Soit X un vecteur propre de B associé à $\lambda = i\frac{2k\pi}{mT}$. On a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(tB)X = e^{\lambda t}X$, et $e^{\lambda(t+mT)} = e^{\lambda t}$ car $\lambda mT = 2ik\pi$ est un multiple entier de $2i\pi$. On en déduit que l'application Y définie par $t \mapsto M(t)X$ vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Y(t+mT) = M(t+mT)X = Q(t+mT)\exp((t+mT)B)X = Q(t)e^{(t+mT)\lambda}X = Q(t)e^{t\lambda}X,$$

c'est-à-dire : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y(t+mT) = Y(t)$, et de plus Y est non nulle puisque $M(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$ et X est non nul en tant que vecteur propre.

Ainsi Y est une solution non nulle de (2) (faire un calcul analogue à celui de la question 17.(a)) et mT-périodique, ce qu'il fallait démontrer.

(b) Soit Y une solution mT-périodique et non nulle. Comme $\mathscr{S}$ est engendré par les colonnes de M, il existe $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = M(t)X$. De plus X est non nul car Y est non identiquement nulle. Comme $Y(mT) = Y(0)$, on a : $M(T)X = M(0)X$. C'est-à-dire :

$$Q(mT)\exp(mTB)X = Q(0)X.$$

Or Q est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, donc : $\exp(mTB)X = Q(mT)^{-1}Q(0)X$. Comme Q est T-périodique et $\exp(mTB) = \exp(TB)^m$, on a : $\exp(TB)^m X = X$.

Comme X est non nul, cela montre que 1 est une valeur propre de $\exp(TB)^m$. Or on montre aisément en triangulant que l'on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\exp(TB)^m\right) = \left\{\lambda^m \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(TB))\right\}.$$

En considérant $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(TB))$ tel que $\lambda^m = 1$, on obtient le résultat voulu (une autre approche aurait été de remarquer que $X^m - 1$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit par $U \mapsto \exp(TB)U$ sur le sous-espace cyclique engendré par X, ou encore d'utiliser le lemme des noyaux pour décomposer le sous-espace propre de $\exp(TB)^m$ associé à 1 à l'aide de sous-espaces propres de $\exp(TB)$).

19. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, on a grâce à la T'-périodicité de X (et donc de X' également, comme on le montre aisément) et T-périodicité de A :

$$X'(t) = X'(t+aT') = A(t+aT')X(t+aT') = A(t+aT'+bT)X(t).$$

Autrement dit, si l'on pose $G = \mathbb{Z}T' + \mathbb{Z}T$ (qui est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, engendré par T et T'), on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall g \in G, \quad X'(t) = A(t+g)X(t).$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, les applications $g \mapsto A(t+g)X(t)$ et $g \mapsto X'(t)$ sont continues et coïncident sur G qui est dense d'après le théorème admis dans l'énoncé (plus de détails ci-dessous), donc elles sont égales sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall g \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t+g)X(t).$$

En prenant $g = u - t$, on a le résultat attendu pour tout $(t, u) \in \mathbb{R}^2$, puisque $X' = AX$.

Détaillons pourquoi G est dense. Il suffit, d'après le résultat de l'énoncé, de montrer qu'il n'est pas de la forme $\mathbb{Z}a$ avec $a \in \mathbb{R}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que c'est le cas : s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$, alors $T \in G = \mathbb{Z}a$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $T = ak$. De même, il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que : $T' = a\ell$ (et $\ell \neq 0$ car $T' \neq 0$), donc : $\dfrac{T}{T'} = \dfrac{k}{\ell} \in \mathbb{Q}$: absurde par hypothèse sur T'. Ainsi G n'est pas de la forme $\mathbb{Z}a$ et doit être dense dans $\mathbb{R}$.

20. Cherchons d'abord une condition nécessaire d'existence. Supposons $n \geqslant 2$ et l'existence d'une solution non nulle X et périodique. Soit T' sa période. Montrons qu'elle doit être un multiple rationnel de T en raisonnant par l'absurde. Si ce n'est pas le cas alors, en posant :

$$V = \mathrm{Vect}\left\{X(t) \mid t \in \mathbb{R}\right\},$$

on note que X' est à valeurs dans V parce que $X'(t) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1}{h}(X(t+h) - X(t))$ et V est fermé en tant que sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie. Par conséquent, l'égalité :

$$\forall (u,t) \in \mathbb{R}^2, \quad A(u)X(t) \overset{(q.\,19)}{=} A(t)X(t) = X'(t) \in V$$

démontre que V est stable par $A(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel nul de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ puisque X n'est pas nulle, donc l'hypothèse de l'énoncé implique : $V = \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrons que c'est impossible : l'égalité précédente implique qu'il existe une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de la forme $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ avec $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $u \in \mathbb{R}$, on a encore par la question précédente :

$$A(u)X(t_i) = A(t_i)X(t_i) = A(0)X(t_i),$$

donc les applications $Y \mapsto A(u)Y$ et $Y \mapsto A(0)Y$ coïncident sur la base $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$: elles sont égales. D'où : $\forall u \in \mathbb{R},\ A(u) = A(0)$. Mais par conséquent, tout vecteur propre de $A(0)$ (et il en existe : on est dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) engendre une droite stable par $A(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, ce qui est absurde par hypothèse de l'énoncé car $n \geqslant 2$ (si $n = 1$, alors l'équation différentielle scalaire $y' = A(0)y$ est aisément résoluble et on sait que ses solutions périodiques ne sont pas périodiques, sauf si $A(0) = 0$).

Ainsi $T' \in \mathbb{Q}T$. Or une fonction T'-périodique est aussi bT'-périodique pour tout $b \in \mathbb{Z}$, donc quitte à effectuer une multiplication convenable on peut supposer $T' \in \mathbb{Z}T$. Par la question 18.(b), la matrice $\exp(TB)$ admet une racine de l'unité pour valeur propre.

Réciproquement, supposons que $\exp(TB)$ admet une racine de l'unité pour valeur propre. Soient $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(TB))$ tels que : $\lambda^m = 1$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\lambda = e^{\frac{2i\pi k}{m}}$. Or une triangulation de B sur $\mathbb{C}$ montre que :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(TB)) = \left\{e^{T\mu} \mid \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)\right\},$$

donc il existe $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ tel que : $e^{T\mu} = \lambda = e^{\frac{2i\pi k}{m}}$. On en déduit l'existence de $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que : $T\mu = \frac{2i\pi k}{m} + 2i\pi\ell = \frac{2i\pi(k+\ell m)}{m}$. Par conséquent B admet comme valeur propre $\frac{2i\pi k'}{mT}$ avec

$k' = k + \ell m \in \mathbb{Z}$, donc par la question 18.(a) l'équation différentielle (2) admet une solution périodique non nulle.

En conclusion, il existe une solution de (2) non nulle et périodique si et seulement si :

$$n \geqslant 2 \ \text{ et } \ \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(TB)) \cap \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathbb{U}_m \right) \neq \emptyset, \qquad \text{ou :} \qquad n = 1 \ \text{ et } \ A = 0.$$

21. Cherchons une solution particulière de (3) sous la forme $X_p : t \mapsto M(t)Y(t)$ où $Y : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une application de classe C^1. On a après calcul :

$$X_p' = AX_p + b \Longleftrightarrow Y' = M^{-1}b \Longleftrightarrow \exists c \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = c + \int_0^t M(x)^{-1} b(x) \mathrm{d}x.$$

Prenons $c = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. Cela nous fournit la solution particulière $X_p : t \mapsto M(t) \displaystyle\int_0^t M(x)^{-1}b(x)\mathrm{d}x$.
Comme les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont exactement les fonctions de la forme $t \mapsto M(t)Y$ avec $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (nous ne l'avons jamais écrit explicitement, mais il suffit pour cela d'imiter le raisonnement déjà apparu çà et là : fin de la question 17.(c) par exemple), on conclut que les solutions de (3) sont exactement les fonctions de la forme :

$$X : t \mapsto M(t) \left(Y + \int_0^t M(x)^{-1} b(x) \mathrm{d}x \right), \quad \text{avec :} \quad Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}).$$

Soit $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Déterminons à quelle condition la fonction X ci-dessus est T-périodique. C'est le cas si et seulement si :

$$X(T) = X(0).$$

Le sens direct est évident. Pour le sens réciproque, on note que si $X(T) = X(0)$, alors X et $X_T : t \mapsto X(t+T)$ sont toutes les deux solutions de (3) grâce à la T-périodicité de A et b, avec la même condition initiale. Par le théorème de Cauchy linéaire, on a alors : $X = X_T$, ce qui équivaut à la périodicité de X.

Regardons donc à quelle condition nécessaire et suffisante on a $X(T) = X(0)$. C'est vrai si et seulement si :

$$M(T) \left(Y + \int_0^T M(x)^{-1} b(x) \mathrm{d}x \right) = M(0)Y \Longleftrightarrow Q(0) \left(\exp(TB) - \mathrm{I}_n \right) Y = M(T) \int_0^T M(x)^{-1} b(x) \mathrm{d}x.$$

Comme $Q(0)$ et $\exp(TB) - \mathrm{I}_n$ sont inversibles (en effet, par hypothèse 1 n'est pas valeur propre de $\exp(TB)$), cette équation admet une unique solution Y, d'où le résultat : il existe une unique solution périodique de (3), donnée par :

$$X : t \mapsto M(t) \left(\left(\exp(TB) - \mathrm{I}_n \right)^{-1} Q(0)^{-1} M(T) \int_0^T M(x)^{-1} b(x) \mathrm{d}x + \int_0^t M(x)^{-1} b(x) \mathrm{d}x \right).$$

22. Soient x et y deux applications de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \\ \cos & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel de l'énoncé équivaut à : $X' = AX$ (notons que A est 2π-périodique : on est dans le cadre du problème). Or on vérifie que la matrice $A(t)$ est diagonalisable pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A(t) = P \begin{pmatrix} 1 + i\cos(t) & 0 \\ 0 & 1 - i\cos(t) \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{avec :} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

Cette réduction permet d'expliciter les solutions de $X' = AX$. Une façon de le faire, qui aura l'avantage de donner rapidement la forme normale : l'application

$$\mathcal{A} : t \mapsto P \begin{pmatrix} t + i\sin(t) & 0 \\ 0 & t - i\sin(t) \end{pmatrix} P^{-1}$$

admet A pour dérivée, et de plus $\mathcal{A}$ et A commutent puisqu'elles sont codiagonalisables (vérification facile). On en déduit, après une dérivation terme à terme qu'il faudrait vérifier soigneusement, que l'application $\exp \circ \mathcal{A}$ est dérivable et de dérivée $A \exp \circ \mathcal{A}$. Par conséquent les applications :

$$X_1 : t \mapsto \exp(\mathcal{A}(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 : t \mapsto \exp(\mathcal{A}(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont solutions de $X' = AX$ et forment une base de l'espace vectoriel $\mathscr{S}$ des solutions de $X' = AX$, puisque $(X_1(0), X_2(0))$ est la base canonique (et est donc une base) de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. L'application matricielle M à déterminer a pour colonnes X_1 et X_2 : c'est donc $t \mapsto \exp(\mathcal{A}(t))$. Mettons-la sous forme normale. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, par commutativité de l'algèbre des matrices diagonales :

$$\begin{aligned}
\exp(\mathcal{A}(t)) &= P \exp\left(\begin{pmatrix} t + i\sin(t) & 0 \\ 0 & t - i\sin(t) \end{pmatrix}\right) P^{-1} \\
&= P \exp\left(\begin{pmatrix} i\sin(t) & 0 \\ 0 & -i\sin(t) \end{pmatrix}\right) \exp\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right) P^{-1} \\
&= e^t P \begin{pmatrix} e^{i\sin(t)} & 0 \\ 0 & e^{-i\sin(t)} \end{pmatrix} P^{-1}.
\end{aligned}$$

Il suffit de poser $B = \mathrm{I}_n$ et $Q : t \mapsto P \begin{pmatrix} e^{i\sin(t)} & 0 \\ 0 & e^{-i\sin(t)} \end{pmatrix} P^{-1}$ pour mettre cette application sous la forme $t \mapsto Q(t)\exp(tB)$ avec $Q : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ continue et 2π-périodique, ce qui conclut.