

X 2024

Épreuve de mathématiques B, MP & MPI, quatre heures

Le sujet comporte quatre parties. La première partie est indépendante des trois autres.

Notations

On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels non nuls, \mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs, \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels et \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes. On note également \mathbb{C}^* l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Si E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel et si v_1, \dots, v_k sont des éléments de E , on note $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs v_1, \dots, v_k .

Si $k \geq 1$ est un entier et si E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, E)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k de \mathbb{R} dans E .

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie. Si U est un ouvert de E et $f : U \rightarrow E$ une fonction différentiable, pour tout $x \in U$ on note $df(x)$ la différentielle de f en x . On rappelle que $df(x)$ est alors un endomorphisme \mathbb{R} -linéaire de E . Si g est un endomorphisme \mathbb{R} -linéaire de E , on note $\|g\|$ sa norme d'opérateur, c'est-à-dire

$$\|g\| = \sup\{\|g(v)\| \mid v \in E, \|v\| \leq 1\}$$

Pour $a \in E$ et $r > 0$ un nombre réel positif, on note $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et rayon r et $\overline{B(a, r)}$ la boule fermée de centre a et rayon r .

On note Id_E l'application identité de E dans E .

Si p et q désignent deux entiers naturels non nuls, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans \mathbb{C} . Si $p = q$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ pour $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ et $\text{GL}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On identifie également le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^p avec le \mathbb{C} -espace vectoriel des vecteurs colonnes $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\exp(A) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ l'exponentielle de la matrice A .

Première partie

Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, périodique de période $T > 0$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0. \tag{1}$$

1. (a) Justifier l'existence de deux solutions y_1 et y_2 dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à (1) telles que :

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1. \end{cases}$$

Justifier que $\text{Vect}(y_1, y_2)$ est l'ensemble des solutions de (1) dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

- (b) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = 1.$$

2. Montrer que si $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une solution de (1), alors la fonction $t \mapsto y(t+T)$ l'est aussi. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t).$$

3. Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = e^{\lambda T}$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) L'équation (1) possède une solution $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ non nulle qui vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = \mu y(t).$$

(b) Le nombre complexe μ est solution de l'équation d'inconnue x :

$$x^2 - (y_1(T) + y_2'(T))x + 1 = 0.$$

(c) L'équation différentielle (1) possède une solution $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ non nulle telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{\lambda t} u(t)$$

où $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une fonction T -périodique.

4. Soient μ_1, μ_2 les racines complexes de l'équation d'inconnue x :

$$x^2 - (y_1(T) + y_2'(T))x + 1 = 0.$$

(a) Montrer que si $\mu_1 \neq \mu_2$ et si λ est un nombre complexe tel que $\mu_1 = e^{\lambda T}$, alors pour toute solution y de (1), il existe deux fonctions T -périodiques w_1 et w_2 , ainsi que deux nombres complexes α et β tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \alpha e^{\lambda t} w_1(t) + \beta e^{-\lambda t} w_2(t).$$

(b) Supposons que $\mu_1 = \mu_2$. Montrer que $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$ et que l'équation (1) admet une solution périodique dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Deuxième partie

Soit $a \in E$ et soit U un ouvert de E contenant a . Soit $f : U \rightarrow E$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur U telle que $df(a) = \text{Id}_E$.

5. (a) Soient V un ouvert convexe de E et h une fonction de classe \mathcal{C}^1 de V dans E . On suppose qu'il existe un réel $C \geq 0$ tel que pour tout $x \in V$, $\|dh(x)\| \leq C$. Montrer que pour tous x_1 et x_2 dans V , on a $\|h(x_2) - h(x_1)\| \leq C \|x_2 - x_1\|$.

(b) Montrer qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $\overline{B(a, r)} \subset U$ et

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B(a, r)}, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \geq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

Nous fixons désormais un réel $r > 0$ vérifiant ces conditions dont la valeur sera utilisée dans la suite des questions de cette deuxième partie.

(c) Montrer que pour tout $x \in B(a, r)$, l'application linéaire $df(x)$ est injective.

6. Soit $y_0 \in E$ tel que $\|y_0 - f(a)\| \leq \frac{r}{4}$.

(a) Montrer que l'application

$$g : \begin{cases} \overline{B(a, r)} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \|y_0 - f(x)\|^2 \end{cases}$$

admet un minimum atteint en un point x_0 de $B(a, r)$.

(b) Montrer que $f(x_0) = y_0$.

7. On note $W = \left\{ y \in E \mid \|y - f(a)\| < \frac{r}{4} \right\}$ et $V = f^{-1}(W) \cap B(a, r)$.

(a) Justifier que V et W sont des ouverts de E .

(b) Montrer que

$$f|_V : \begin{cases} V & \rightarrow W \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$$

est une bijection continue de V sur W dont la réciproque est une fonction continue sur W .

Troisième partie

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{C}[A]$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la forme $P(A)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme. On note

$$(\mathbb{C}[A])^* = \{B \in \mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid B^{-1} \in \mathbb{C}[A]\}$$

8. (a) Justifier que $\mathbb{C}[A]^*$ est un sous-groupe abélien de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.
(b) Montrer que $(\mathbb{C}[A])^* = \mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
9. Montrer que $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*$.
10. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit l'application

$$Z_a : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto t + iat(1-t) \end{cases} .$$

- (a) Montrer que l'application

$$\begin{cases}]0, 1[\times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ (t, a) & \mapsto Z_a(t) \end{cases}$$

est injective.

- (b) Soient M_1 et M_2 deux éléments de $(\mathbb{C}[A])^*$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [0, 1], \quad M(t) = Z_a(t)M_1 + (1 - Z_a(t))M_2 \in (\mathbb{C}[A])^*$$

- (c) En déduire que $(\mathbb{C}[A])^*$ est connexe par arcs.
11. (a) Montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{C}[A]$ contenant 0 et un ouvert V de $\mathbb{C}[A]$ contenant la matrice identité I_n tels que la fonction exponentielle induit une bijection continue de $U \subset \mathbb{C}[A]$ sur V dont la réciproque est une fonction continue sur V .
(b) En déduire que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$.
12. Montrer que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$.
13. On veut montrer que $\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*$. On suppose que $\exp(\mathbb{C}[A]) \neq (\mathbb{C}[A])^*$ et on fixe $M_1, M_2 \in (\mathbb{C}[A])^*$ telles que $M_1 \in \exp(\mathbb{C}[A])$ et $M_2 \notin \exp(\mathbb{C}[A])$.
(a) Montrer qu'il existe une application continue f de $(\mathbb{C}[A])^*$ dans $\{0, 1\}$ telle que $f(M_1) = 0$ et $f(M_2) = 1$.
(b) Conclure.
14. Conclure que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Quatrième partie

Soient $T > 0$ un nombre réel et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel. Soit

$$A : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \text{M}_n(\mathbb{C}) \\ t & \mapsto A(t) \end{cases}$$

une application continue sur \mathbb{R} et T -périodique. On considère le système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{2}$$

où X est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C}^n , de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

15. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}^*$ et une solution $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ non nulle de (2) tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t+T) = \mu Y(t).$$

Soit \mathcal{S} l'espace des solutions dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ de (2). Soit (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) une base de \mathcal{S} . Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ la matrice dont les colonnes sont $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$. On dispose ainsi d'une application M de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

16. (a) Montrer que pour tout nombre réel t , $M(t) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $M'(t) = A(t)M(t)$.
 (b) Montrer que la matrice $(M(t))^{-1}M(t+T)$ est indépendante de $t \in \mathbb{R}$.

(c) En déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t+T) = M(t) \exp(TB).$$

- (d) En déduire qu'il existe une application $Q : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ continue sur \mathbb{R} et T -périodique telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t) = Q(t) \exp(tB).$$

(On appelle cette identité la forme normale de la matrice M).

On admet qu'il existe deux matrices D et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que D est diagonalisable, N est nilpotente et

$$B = D + N \quad \text{et} \quad DN = ND.$$

Il existe donc une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ telles que $D = P\Delta P^{-1}$.

17. (a) Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_n(t) \in \mathbb{C}^n$ les colonnes de la matrice $M(t)P$. Montrer que (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) est une base de l'espace \mathcal{S} .
 (b) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les nombres complexes tels que $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Pour tous $0 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq n$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $R_{i,k}(t)$ la k^{e} colonne de la matrice $\frac{1}{i!}Q(t)N^iP$. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$Z_k(t) = e^{\lambda_k t} \left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_{i,k}(t) \right)$$

et vérifier que les applications $R_{i,k}$ sont continues sur \mathbb{R} et T -périodiques.

- (c) En déduire que si les parties réelles des λ_i pour $1 \leq i \leq n$ sont strictement négatives et si Y est une solution quelconque de (2), alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0.$$

18. (a) Montrer que si B a une valeur propre de la forme $\lambda = i\frac{2k\pi}{mT}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, alors (2) a une solution mT -périodique non nulle.
 (b) On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que (2) possède une solution mT -périodique non nulle. Montrer que $\exp(TB)$ possède une valeur propre qui est une racine m^{e} de l'unité.
 19. Dans cette question, on suppose que (2) possède une solution T' -périodique X avec $T' \notin \mathbb{Q}T$. Montrer que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$A(u)X(t) = A(t)X(t).$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui n'est pas de la forme $\mathbb{Z}a$ pour $a \in \mathbb{R}$, alors G est dense dans \mathbb{R} .

20. On suppose dans cette question qu'il n'existe pas de sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^n$, différent de $\{0\}$ et \mathbb{C}^n , tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, V est stable par $A(t)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et sur B pour que (2) ait au moins une solution périodique non nulle.

21. Soit le système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t) \quad (3)$$

où $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ est une fonction continue sur \mathbb{R} et T -périodique.

On suppose que 1 n'est pas valeur propre de $\exp(TB)$. Montrer que (3) possède une unique solution T -périodique.

22. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - \cos(t)y(t) \\ y'(t) &= \cos(t)x(t) + y(t) \end{cases}$$

et déterminer sa forme normale (voir la question 16.(d)).