X-ENS 2024

Épreuve de mathématiques A, MP & MPI, quatre heures

Le problème comporte deux parties qui sont indépendantes.

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.
Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle *point fixe* de σ un élément $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que : $\sigma(i) = i$. On note $\nu(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ. On appelle *dérangement* une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe. On note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$ et D_n son cardinal.
Si k est un entier naturel tel que $k \leqslant n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial correspondant au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Par convention, on pose $\binom{n}{k} = 0$ pour un entier naturel $k > n$.
On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels. Si de plus $n \geqslant 0$ est un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des éléments $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.
Si $n \geqslant 0$ et $d \geqslant 1$ sont deux entiers naturels, on note $d \mid n$ la relation « d divise n ».
Si x est un réel, on note $E(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire l'unique entier $E(x)$ tel que $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.
Si p est un nombre premier et n un entier naturel non nul, on note

$$\nu_p(n) = \max\{\nu \in \mathbb{N} : p^\nu \mid n\}.$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels.
Pour tout ensemble E, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
On note $\ln_2$ la fonction de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\ln_2(x) = \ln(\ln(x))$.
Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite de nombres réels, on note, pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n \leqslant x} a_n = \sum_{n=1}^{E(x)} a_n, \qquad \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} a_n = \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p, \qquad \prod_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} a_n = \prod_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p$$

avec la convention que la somme indexée par l'ensemble vide vaut 0 et le produit indexé par l'ensemble vide vaut 1.
On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'il existe un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Première partie

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. Pour tout nombre réel x, on considère la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$M_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que la matrice $-M_0$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1).$$

2. Calculer

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma), \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\nu(\sigma) \text{ et } \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}.$$

3. Établir que

$$\operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\}$$

et en déduire la probabilité qu'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ tirée uniformément au hasard soit de signature prescrite.

4. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, préciser à quelle condition sur $\nu(\sigma)$, on a $\sigma \in \mathfrak{D}_n$. En déduire que

$$\operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\} + (-1)^{n-1}(n-1).$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-1}{0} & & & & \binom{m-1}{m-1} & 0 \\ \binom{m}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m+1}(\mathbb{R}).$$

5. (a) Justifier que les familles $(1, X, \ldots, X^m)$ et $(1, X-1, \ldots, (X-1)^m)$ sont des bases de $\mathbb{R}_m[X]$.
   (b) Montrer que la transposée de M est la matrice de l'application linéaire identité

$$\begin{cases} \mathbb{R}_m[X] & \to & \mathbb{R}_m[X] \\ P & \mapsto & P \end{cases}$$

   dans les bases $(1, X, \ldots, X^m)$ au départ et $(1, X-1, \ldots, (X-1)^m)$ à l'arrivée.
   (c) Établir que M est inversible et expliciter son inverse.
   (d) En déduire que pour tous $(u_0, \ldots, u_m)$, $(v_0, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\text{si : } \forall k \leqslant m,\ u_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} v_\ell, \text{ alors : } \forall k \leqslant m,\ v_k = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} u_\ell.$$

6. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère l'espace probabilisé $(\mathfrak{D}_n, \mathscr{P}(\mathfrak{D}_n))$ muni de la probabilité uniforme. On définit une variable aléatoire Y_n par $Y_n(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

7. (a) Expliciter la loi de Y_n.
   (b) Calculer, pour tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n = \varepsilon)$.

Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère l'espace probabilisé $(\mathfrak{S}_n, \mathscr{P}(\mathfrak{S}_n))$ muni de la probabilité uniforme. On définit une variable aléatoire Z_n par $Z_n(\sigma) = \nu(\sigma)$.

8. (a) Expliciter la loi de Z_n.
   (b) Calculer, pour tout entier naturel $k \leqslant n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)$.
   (c) Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation aléatoire ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Soit n un entier naturel non nul. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on rappelle qu'il existe, à l'ordre près, une unique décomposition $\sigma = c_1 c_2 \cdots c_{\omega(\sigma)}$, où $\omega(\sigma) \in \mathbb{N}^*$ où $c_1, \ldots, c_{\omega(\sigma)}$ sont des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \cdots \leqslant \ell_{\omega(\sigma)}$ et $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{\omega(\sigma)} = n$. En particulier, on prendra garde au fait que l'on prend ici en compte les cycles c_i de longueur 1, qui correspond aux points fixes de σ, auquel cas c_i est l'identité.
Par exemple, si σ est la permutation identité de $\{1, \ldots, n\}$, on a $\omega(\sigma) = n$ et $\ell_{\omega(\sigma)} = 1$. Et si σ est la permutation $(1, 2)$ de $\{1, 2, 3\}$, on a $\sigma = c_1 \circ c_2$ où c_1 est l'identité et $c_2 = (1, 2)$ de sorte que $\omega(\sigma) = 2$.
On définit ainsi une application $\omega : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}$. On se propose de montrer qu'en moyenne, $\omega(\sigma)$ est de l'ordre de $\ln(n)$ dans un sens que l'on précisera.
Pour un entier k inférieur ou égal à n, on note $s(n, k)$ le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ telles que $\omega(\sigma) = k$. On considère alors, sur l'espace probabilisé $(\mathfrak{S}_n, \mathscr{P}(\mathfrak{S}_n))$ muni de la probabilité uniforme, la variable aléatoire X_n définie par $X_n(\sigma) = \omega(\sigma)$.

9. Calculer, pour $n \in \{2, 3, 4\}$, la quantité $\displaystyle\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \omega(\sigma)$.

10. Préciser $s(n, n)$ et $s(n, 1)$ puis montrer que, pour $2 \leqslant k \leqslant n - 1$, on a
$$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) + (n - 1) s(n - 1, k).$$
Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pourra distinguer les cas $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(1) \neq 1$.

11. Établir que, pour tout réel x, $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} (x + i) = \sum_{k=1}^{n} s(n, k) x^k$.

12. Démontrer que $\displaystyle\mathbb{E}[X_n] \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

13. (a) Montrer que
$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k(k-1) s(n, k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}.$$
   (b) En déduire que
$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k^2 s(n, k) = \mathbb{E}[X_n] + \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \right).$$

14. (a) Montrer que
$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \omega(\sigma)^2 \underset{n \to +\infty}{=} (2\gamma + 1) \ln(n) + c + \ln(n)^2 + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$
pour un réel c à préciser.
   (b) Montrer que
$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\omega(\sigma) - \ln(n))^2 \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + c + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

15. Justifier qu'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \geqslant 1$, on a
$$\mathbb{P}(|X_n - \ln(n)| > \varepsilon \ln(n)) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2 \ln(n)}.$$

Deuxième partie

Pour tout entier naturel n non nul, on pose
$$\omega(n) = \operatorname{card}\{p \text{ premier} : p|n\} = \sum_{\substack{p|n \\ p \text{ premier}}} 1.$$

Par exemple, $\omega(6) = \omega(12) = 2$.

16. Soit $(a_n)_{n\geqslant 2}$ une suite de nombres réels. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $A(t) = \sum_{2\leqslant k\leqslant t} a_k$. Soit $b : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$\sum_{k=2}^{n} a_k b(k) = A(n)b(n) - \int_2^n b'(t)A(t)\mathrm{d}t.$$

17. L'objectif de cette question est de démontrer que si n est un entier naturel non nul, alors $\prod_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^n$.
    (a) Traiter les cas $n \in \{1, 2, 3\}$.

    On suppose à présent $n \geqslant 4$ et le résultat connu au rang k pour tout entier k compris entre 1 et $n - 1$.

    (b) Établir le résultat au rang n si n est pair.
    (c) Soit $n = 2m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$. Justifier que $\prod_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p$ divise $\binom{2m+1}{m}$ et montrer que $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.
    (d) Conclure.

18. Soit n un entier naturel non nul et soit p un nombre premier. Justifier la formule $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} E\left(\frac{n}{p^k}\right)$ et montrer que
$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$

19. (a) Par comparaison avec une intégrale, établir que
$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + O(\ln(n)).$$
    (b) Justifier que $n! = \prod_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}$ et en déduire que
$$n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - n\ln(4) < \ln(n!) \leqslant n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}.$$
    (c) Justifier que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ converge.

(d) Conclure que $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+O(1)$.

20. (a) On pose, pour tout réel $t \geqslant 2$,

$$R(t) = \sum_{\substack{p\leqslant t\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(t).$$

Montrer, en utilisant le résultat de la question 16, que

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = 1 + \ln_2(n) - \ln_2(2) + \frac{R(n)}{\ln(n)} + \int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t.$$

(b) Justifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{R(t)}{t(\ln(t))^2}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$.

(c) Établir que $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln_2(n) + c_1 + O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$, pour un réel $c_1 \in \mathbb{R}$ à préciser.

21. (a) Soient x un réel positif supérieur ou égal à 1 et $q \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la quantité

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} \cap [1,x] : n \equiv 0 \pmod q\} - \frac{x}{q}$$

est bornée en valeur absolue par un réel indépendant de x et de q.

(b) Démontrer, à l'aide d'une interversion de sommes, que $\displaystyle\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} \omega(n) \underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(x) + O(1)$.

22. (a) Montrer que

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n) - \ln_2(x))^2 \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2\right) - \ln_2(x)^2 + O\left(\ln_2(x)\right).$$

(b) Montrer que

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 = \sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_1 \text{ premier}}}\ \sum_{\substack{p_2\leqslant x\\ p_2 \text{ premier}}} \operatorname{card}\{n\in\mathbb{N}^* : n \leqslant x,\ p_1|n \text{ et } p_2|n\}.$$

(c) Montrer que

$$\left(\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}} \operatorname{card}\{n\in\mathbb{N}^* : n \leqslant x,\ p_1|n \text{ et } p_2|n\}\right) - x\ln_2(x)^2 \underset{x\to+\infty}{=} O(x\ln_2(x)).$$

On pourra estimer le cardinal de l'ensemble des paires de nombres premiers (p_1,p_2) tels que $p_1p_2 \leqslant x$ quand x tend vers $+\infty$.

(d) Conclure que $\displaystyle\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2 \underset{x\to+\infty}{=} O(\ln_2(x))$.

23. On pose $\mathscr{S} = \left\{ n \geqslant 3 : \left|\dfrac{\omega(n)-\ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right| \geqslant (\ln_2(n))^{1/4}\right\}$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\operatorname{card}\{n\leqslant x : n \in \mathscr{S}\} = 0.$$

On pourra commencer par écrire $\operatorname{card}(\mathscr{S}\cap[1,x]) \underset{x\to+\infty}{=} \operatorname{card}(\mathscr{S}\cap[\sqrt{x},x]) + O(\sqrt{x})$ *et remarquer que dans la somme du membre de droite, la différence* $|\ln_2(n)-\ln_2(x)|$ *reste bornée.*

On dit alors que l'ensemble $\mathscr{S}$ a densité 0. De même que pour les permutations, on obtient que, en dehors d'un ensemble de densité nulle, $\omega(n) = \ln(\ln(n))(1+o(1))$.