Concours Commun INP 2024

Épreuve de mathématiques II, MPI, quatre heures
(corrigé)

EXERCICE 1

Q 1. Déterminons les valeurs propres de A. On a :

$$\begin{aligned}\chi_A = \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} X+4 & -2 & -X-2 \\ 6 & X-4 & 0 \\ 1 & -1 & X+2 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\ &= \begin{vmatrix} X+5 & -3 & 0 \\ 6 & X-4 & 0 \\ 1 & -1 & X+2 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_3) \\ &= (X+2)\begin{vmatrix} X+5 & -3 \\ 6 & X-4 \end{vmatrix} \\ &= (X+2)\begin{vmatrix} X+2 & -3 \\ X+2 & X-4 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2) \\ &= (X+2)\begin{vmatrix} X+2 & -3 \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ &= (X+2)^2(X-1). \end{aligned}$$

On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2, 1\}$. De plus, la résolution des systèmes linéaires $AX = -2X$ et $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, permet d'obtenir :

$$\ker(A + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}\right).$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres égale 3, donc A est diagonalisable. De, plus, comme ses sous-espaces propres sont supplémentaires, la concaténation de bases de chaque sous-espace propre donne une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. La famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}\right)$ est donc une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Par conséquent, si l'on pose :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la formule du changement de base appliquée à $X \mapsto AX$, entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$, donne :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où le résultat.

Q 2. La relation de récurrence couplée de l'énoncé peut également s'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Après multiplication à gauche de chaque membre de l'égalité par P^{-1}, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = P^{-1}APY_n = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

En identifiant coordonnée par coordonnée, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+1} = -2\alpha_n, \quad \beta_{n+1} = -2\beta_n, \quad \gamma_{n+1} = \gamma_n.$$

Ce sont des suites géométriques. On en déduit immédiatement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = (-2)^n \alpha_0, \quad \beta_n = (-2)^n \beta_0, \quad \gamma_n = \gamma_0,$$

et donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \begin{pmatrix} (-2)^n \alpha_0 \\ (-2)^n \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$.

Déduisons-en une condition nécessaire et suffisante pour que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Cela équivaut à la convergence de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous proposons deux façons de procéder. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors, par continuité de l'application définie sur $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ par $M \mapsto P^{-1}M$ (qui est linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie : d'où la continuité), on a la convergence de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (P^{-1}X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ également – et réciproquement, puisque $M \mapsto PM$ est aussi continue –. Or la convergence d'une suite à valeurs dans $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ équivaut à la convergence composante par composante. Donc :

$$\begin{aligned}(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} &\iff \left((-2)^n\alpha_0\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \left((-2)^n\beta_0\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (\gamma_0)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent} \\ &\iff \alpha_0 = \beta_0 = 0.\end{aligned}$$

Cependant on désire une condition sur (u_0, v_0, w_0). On y parvient en liant ces trois réels à α_0, β_0 et γ_0, *via* la relation :

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = Y_0 = P^{-1}X_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} u_0 - v_0 + 4w_0 \\ 6u_0 - 3v_0 + 6w_0 \\ -u_0 + v_0 - w_0 \end{pmatrix}.$$

L'équivalence ci-dessus devient donc :

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \iff u_0 - v_0 + 4w_0 = 0, \quad 6u_0 - 3v_0 + 6w_0 = 0.$$

On peut simplifier cette condition, puisque l'intersection de deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ est une droite. En résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 4z &=& 0 \\ 6x - 3y + 6z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x - y + 4z &=& 0 \\ 3y - 18z &=& 0 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on trouve comme espace de solutions : $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2, 6, 1)\right)$. En conclusion :

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \iff (u_0, v_0, w_0) \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2, 6, 1)\right).$$

Explicitons alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cela découle immédiatement de la relation $X_n = PY_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-2)^n\alpha_0 + (-2)^n\beta_0 + 2\gamma_0 \\ (-2)^n\beta_0 + 6\gamma_0 \\ (-2)^n\alpha_0 + \gamma_0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas de convergence, on a plus sobrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \gamma_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : les trois suites sont constantes.

Remarque. On pouvait se dispenser de calculer l'inverse de P : la relation $X_0 = PY_0$ exprime en effet (u_0, v_0, w_0) en fonction de α_0, β_0 et γ_0. On en déduit notamment que la convergence de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique $u_0 = 2\gamma_0$, $v_0 = 6\gamma_0$ et $w_0 = \gamma_0$, et donc que (u_0, v_0, w_0) est proportionnel à $(2, 6, 1)$: on retrouve le vecteur directeur de la droite trouvée ci-dessus. Pourquoi, alors, me suis-je embêté à calculer P^{-1} ? C'est pour m'affranchir de l'examen de la réciproque (ce qui n'aurait pas été insurmontable, certes).

Autre approche. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur L, alors en remarquant que l'on a $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_0 = A^{-n} X_n = P \begin{pmatrix} (-2)^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} L$$

par continuité de l'application linéaire $M \mapsto PMP^{-1}$. Pour simplifier ce produit matriciel, on note que la matrice :

$$Q = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

vérifie : $Q^2 = Q$. C'est donc une matrice de projecteur. Ses caractéristiques géométriques sont $\mathrm{im}(Q) = \ker(Q - \mathrm{I}_3)$ et $\ker(Q)$: la relation de similitude ci-dessus permet d'obtenir une base de $\mathrm{im}(Q) = \ker(Q - \mathrm{I}_3)$: c'est donné par la troisième colonne de P. On a donc :

$$\mathrm{im}(Q) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi : $X_0 = QL \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Nous avons obtenu la condition nécessaire sans le moindre calcul. La réciproque reste cependant à établir.

EXERCICE 2

Q 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudions la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-x\sqrt{n}}$. Si $x \leqslant 0$, alors $e^{-x\sqrt{n}} \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$: la série diverge grossièrement.

Supposons donc $x > 0$. Alors $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-x\sqrt{n}} = 0$ par croissances comparées, donc :

$$e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (son exposant est $2 > 1$), et les séries $\sum_{n\geqslant 0} e^{-x\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs ; on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-x\sqrt{n}}$ converge également, par comparaison des séries à termes positifs.

En résumé, la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ est définie sur $D =]0, +\infty[$.

Q 4. Montrons que f est continue sur D en montrant qu'elle est continue sur tout segment inclus dans D. Soient $a, b \in D$ tels que $a \leqslant b$. Montrons que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$, où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a, b]$, $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$, on a :

$$|f_n(x)| = e^{-x\sqrt{n}} \leqslant e^{-a\sqrt{n}},$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant e^{-a\sqrt{n}}.$$

La série $\sum_{n \geqslant 0} e^{-a\sqrt{n}}$ converge d'après la première question (car $a \in D$), donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum_{n \geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge. Ainsi la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a, b]$ inclus dans D. Comme, de plus, f_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la somme f de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ est continue sur tout segment inclus dans D, donc sur D : d'où le résultat.

Q 5. On reprend la notation f_n de la question précédente. Le même raisonnement que ci-dessus démontre que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$ (par exemple). En effet, lorsqu'on démontre la convergence normale sur $[a, b]$, le réel b n'a pas d'effet sur la majoration de $\|f_n\|_\infty$ et on aurait très bien pu raisonner sur $[a, +\infty[$.
De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Donc, d'après le théorème de la double limite :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 1.$$

Q 6. Soit $x > 0$. L'application $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t \in [n, n+1], \quad e^{-x\sqrt{t}} \leqslant e^{-x\sqrt{n}}, \ \text{et : } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \ \forall t \in [n-1, n], \quad e^{-x\sqrt{n}} \leqslant e^{-x\sqrt{t}}.$$

En intégrant ces inégalités sur leurs intervalles de validité, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t \leqslant e^{-x\sqrt{n}}, \ \text{et : } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad e^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

En sommant de 0 à l'infini la première inégalité, de 1 à l'infini la seconde inégalité, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}, \ \text{et : } \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

Notons qu'on intègre des fonctions continues et positives sur $\mathbb{R}_+$: l'intégrale existe *a priori* et il n'était pas nécessaire de montrer la convergence en amont ; d'ailleurs, la première majoration démontre la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t$.
Il reste à ajouter le terme de la somme correspondant à $n = 0$ dans la deuxième inégalité, pour finalement reconnaître $f(x)$ et obtenir l'encadrement :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

Q 7. On reprend l'encadrement de la question précédente. Pour tout $x > 0$ on a, après le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (licite parce que strictement croissant et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et on a $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2\sqrt{t}e^{-x\sqrt{t}}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \int_0^{+\infty} 2ue^{-xu}\mathrm{d}u.$$

On calcule cette dernière intégrale en intégrant par parties, en intégrant $u \mapsto e^{-xu}$ (qui est continue sur $]0, +\infty[$; une primitive est $u \mapsto \frac{e^{-xu}}{-x}$) et en dérivant $u \mapsto u$ (qui est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivée $u \mapsto 1$). Le terme entre crochets est correctement défini, étant donné que :

$$\lim_{u\to 0} \frac{ue^{-xu}}{-x} = \lim_{u\to+\infty} \frac{ue^{-xu}}{-x} = 0.$$

On en déduit, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^{+\infty} ue^{-xu}\mathrm{d}u = \left[\frac{ue^{-xu}}{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{-x}\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\left[\frac{e^{-xu}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}.$$

On en déduit :

$$\forall x > 0, \quad \frac{2}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2},$$

donc : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\frac{2}{x^2}} = 1$, puis : $\displaystyle f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$ d'après le théorème des gendarmes.

PROBLÈME

Q 8. La matrice A est bien symétrique réelle. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On a après calculs :

$$X^\top AX = 2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x + y)^2.$$

On en déduit immédiatement : $X^\top AX \geqslant 0$. De plus, si : $X^\top AX = 0$, alors : $x^2 = (x+y)^2 = 0$, car une somme de réels positifs est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $x = y = 0$, puis : $X = 0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. Par contraposée, si X est non nul alors : $X^\top AX > 0$. La matrice A est donc symétrique définie positive.

Caractérisation spectrale

Q 9. Une matrice A symétrique réelle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives (sachant qu'elles sont toutes réelles par le théorème spectral).

Q 10. On a : $P' = 3X^2 - 12X + 9 = 3(X^2 - 4X + 3) = 3(X - 1)(X - 3)$. On en déduit le signe de $P'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis les variations de $x \mapsto P(x)$:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$P'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	↗	$-3 < 0$	↗	$1 > 0$	↘	$-3 < 0$	↗	$+\infty$

Cette étude, et le théorème des valeurs intermédiaires, assurent que $x \mapsto P(x)$ s'annule exactement trois fois sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme P est de degré 3, on a ainsi toutes ses racines : elles sont strictement positives.

Déduisons-en que la matrice B de l'énoncé est définie positive (elle est bien symétrique réelle). On se doute que $\chi_B = P$, ce qu'on vérifie par le calcul (on peut développer comme un cochon, n'ayant pas la prétention d'obtenir χ_B sous forme factorisée) :

$$\begin{aligned}\chi_B = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} &= (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ X-2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)\left((X-2)(X-3)-1\right) - (X-2) \\ &= X^3 - 6X^2 + 9X - 3 \\ &= P.\end{aligned}$$

Les valeurs propres de B sont donc les racines de P : elles sont strictement positives par ce qui précède, donc par la question précédente B est symétrique définie positive : d'où le résultat.

Un critère en dimension 2

Q 11. La trace et le déterminant d'une matrice réelle sont, respectivement, la somme et le produit de ses valeurs propres (éventuellement complexes) comptées autant de fois que leurs ordres de multiplicité.

Or les valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive sont réelles et strictement positives d'après la caractérisation spectrale, d'où le résultat : $\mathrm{tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Q 12. Notons λ et μ les deux valeurs propres de M, avec répétition éventuelle. D'après le résultat rappelé à la question précédente, on a : $\mathrm{tr}(M) = \lambda + \mu$, et : $\det(M) = \lambda\mu$.

La stricte positivité du déterminant assure que λ et μ sont non nulles et de même signe ; la stricte positivité de la trace implique alors qu'elles sont strictement positives : par la caractérisation spectrale, M est symétrique définie positive. D'où le résultat.

Q 13. Considérons la matrice symétrique réelle :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a évidemment : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \{-1, 3\}$. La caractérisation spectrale montre que M n'est pas définie positive. Pourtant : $\det(M) = 3 > 0$, et : $\mathrm{tr}(M) = 1 > 0$, ce qui montre que le résultat de la question précédente ne s'étend pas aux matrices d'ordre supérieur.

Q 14. Les applications $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont polynomiales donc de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. La seconde ne s'annule pas sur cet ouvert, donc $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{xy}$ est aussi de classe C^2. On en déduit que f l'est aussi. Ses extremums sont donc parmi ses points critiques. Or :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \nabla f(x, y) = \left(1 - \frac{1}{yx^2}, 1 - \frac{1}{xy^2}\right).$$

On en déduit aisément que si $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, alors $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si et seulement si $(x, y) = (1, 1)$. Ainsi $(1, 1)$ est l'unique point critique de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$; pour déterminer s'il s'agit d'un extremum, nous passons par l'étude de la matrice hessienne en ce point. On a :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{yx^3} & \dfrac{1}{x^2y^2} \\ \dfrac{1}{x^2y^2} & \dfrac{2}{xy^3} \end{pmatrix},$$

donc : $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a : $\mathrm{tr}(H_f(1, 1)) = 4 > 0$, et : $\det(H_f(1, 1)) = 3 > 0$. La matrice hessienne en $(1, 1)$ est donc symétrique définie positive, ce qui démontre que f admet en $(1, 1)$ est un minimum local : d'où le résultat.

Le critère de Sylvester

Q 15. Posons : $M = \begin{pmatrix} M_k & U \\ U^\top & N \end{pmatrix}$, avec $N \in \mathrm{M}_{n-k}(\mathbb{R})$ et $U \in \mathrm{M}_{k,n-k}(\mathbb{R})$, et : $X = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ avec $A \in \mathrm{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{M}_{n-k,1}(\mathbb{R})$. On a après calculs :

$$X^\top MX = A^\top M_k A + A^\top UB + B^\top U^\top A + B^\top NB.$$

Il suffit donc de poser $A = X_k$ et $B = 0_{\mathrm{M}_{n-k,1}(\mathbb{R})}$ (c'est-à-dire : $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{\mathrm{M}_{n-k,1}(\mathbb{R})} \end{pmatrix}$, qui est bien non nul car X_k l'est), pour avoir l'égalité voulue :

$$X_k^\top M_k X_k = X^\top MX.$$

Q 16. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On veut montrer que M vérifie le critère de Sylvester, c'est-à-dire : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\det(M_n) > 0$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Nous allons démontrer que $\det(M_k)$ est strictement positif en montrant que M_k est symétrique définie positive. La symétrie découle aisément de celle de M.

Montrons la définie positivité. Soit $X_k \in \mathrm{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{k,1}(\mathbb{R})}\}$. Par la question précédente, il existe $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ tel que : $X_k^\top M_k X_k = X^\top MX$. Or M est définie positive par hypothèse et X est non nul, donc : $X^\top MX > 0$. Par suite : $X_k^\top M_k X_k > 0$. Cela vaut pour tout vecteur X_k non nul, donc M_k est définie positive. Par la question **Q 11** on a donc : $\det(M_k) > 0$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi M vérifie le critère de Sylvester, d'où le résultat.

Q 17. La matrice M_{n-1} étant supposée définie positive, toutes ses valeurs propres sont strictement positives et en particulier non nulles : elle est donc inversible. Il suffit donc de poser $V = -(M_{n-1})^{-1}U$ pour avoir un vecteur colonne tel que $M_{n-1}V + U = 0_{\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
Q^\top MQ &= \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-1} & 0_{\mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-1} & V \\ 0_{\mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-1} & 0_{\mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & M_{n-1}V + U \\ U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-1} & 0_{\mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{\mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})} \\ U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{\mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})} \\ V^\top M_{n-1} + U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

or M_{n-1} est symétrique, donc : $V^\top M_{n-1} + U^\top = (M_{n-1}V + U)^\top = 0_{\mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})}$. On a bien :

$$Q^\top MQ = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{\mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})} & \beta \end{pmatrix}$$

avec $\beta = U^\top V + \alpha \in \mathbb{R}$. Il reste à montrer que β est strictement positif. On a : $\det(Q^\top MQ) = \det(M_{n-1})\beta$, parce que $Q^\top MQ$ est triangulaire par blocs, mais aussi :

$$\det(Q^\top MQ) = \det(Q^\top)\det(M)\det(Q) = \det(Q)^2 \det(M).$$

Or par hypothèse $\det(M) > 0$, et la matrice Q est inversible (elle est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls), donc : $\det(Q)^2 \det(M) > 0$. La matrice M_{n-1} étant définie positive, elle est aussi de déterminant strictement positif par la question **Q 11**. On en déduit :

$$\beta = \frac{\det(Q^\top MQ)}{\det(M_{n-1})} > 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Q 18. Nous allons montrer par récurrence sur n que :

$$\mathrm{P}_n : \text{« toute matrice symétrique réelle d'ordre } n \text{ vérifiant le critère de Sylvester est définie positive »}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Initialisons. Soit $M = (a) \in \mathrm{M}_1(\mathbb{R})$. On suppose que M vérifie le critère de Sylvester. Alors : $\det(M) = a > 0$, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad (x)^\top M(x) = x^2 a > 0,$$

donc M est définie positive : d'où P_1.

À présent, soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose P_n. Soit $M \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique vérifiant le critère de Sylvester. On veut montrer que M est définie positive.

Pour cela, avec les notations de la question précédente (à ceci près qu'on remplace tous les n par $n+1$), qui s'applique effectivement vu qu'une matrice définie positive est de déterminant strictement positif, on a : $M = (Q^{-1})^\top \begin{pmatrix} M_n & 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})} & \beta \end{pmatrix} Q^{-1}$, donc pour tout vecteur X on a :

$$X^\top M X = X^\top (Q^{-1})^\top \begin{pmatrix} M_n & 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})} & \beta \end{pmatrix} Q^{-1} X = (Q^{-1}X)^\top \begin{pmatrix} M_n & 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})} & \beta \end{pmatrix} Q^{-1} X.$$

Notons $Q^{-1}X = \begin{pmatrix} X_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ avec $X_n \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $x_{n+1} \in \mathbb{R}$. L'égalité ci-dessus peut alors se réécrire :

$$X^\top M X = X_n^\top M_n X_n + (x_{n+1})^2 \beta.$$

Or M_n est symétrique d'ordre n et les mineurs principaux de M_n sont clairement parmi ceux de M, donc le fait que M vérifie le critère de Sylvester implique que c'est aussi le cas de M_n. Par hypothèse de récurrence, M_n est définie positive. On en déduit d'abord : $X_n^\top M_n X_n \geqslant 0$, et comme $\beta > 0$ cela implique : $X^\top M X \geqslant 0$. De plus, si $X^\top M X = 0$ alors, une somme de réels positifs étant nulle seulement si chaque terme est nul, on a :

$$X_n^\top M_n X_n = 0, \quad (x_{n+1})^2 \beta = 0.$$

Comme M_n est définie positive et β strictement positif, ceci implique $X_n = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $\beta = 0$, donc $Q^{-1}X = 0_{\mathrm{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})}$ puis $X = 0_{\mathrm{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})}$ après multiplication par Q. Par contraposée, si X est non nul alors : $X^\top M X > 0$. Ainsi M est définie positive : ce qu'il fallait démontrer.

Par principe de récurrence, on a P_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire : toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Q 19. Soit $x \in \mathbb{R}$. La matrice $C(x)$ est bien symétrique. Calculons les trois mineurs principaux de $C(x)$. On a :

$$\begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2x \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2x \\ x & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2x^2.$$

On en déduit que $C(x)$ vérifie le critère de Sylvester (si et seulement si $C(x)$ est définie positive) si et seulement si : $x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$.

Q 20. La matrice de l'énoncé ne vérifie pas le critère de Sylvester, puisque son troisième mineur principal est négatif :

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 < 0.$$

Elle n'est donc pas définie positive.

Q 21. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Posons : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a :

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz = X^\top \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} X.$$

Étudions si cette matrice (que je nomme A) est définie positive. Elle est bien symétrique réelle.
Première méthode : critère de Sylvester. On a :

$$\begin{vmatrix} 4 \end{vmatrix} = 4 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0.$$

Par le critère de Sylvester, A est définie positive.
Deuxième méthode : caractérisation spectrale. Il s'avère qu'ici les valeurs propres de A sont assez simples à obtenir. En effet :

$$\begin{aligned} \chi_A = \begin{vmatrix} X-4 & -1 & 3/2 \\ -1 & X-1 & 0 \\ 3/2 & 0 & X-1 \end{vmatrix} &= \frac{3}{2} \begin{vmatrix} -1 & X-1 \\ 3/2 & 0 \end{vmatrix} + (X-1) \begin{vmatrix} X-4 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{3}{2}(X-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3/2 & 0 \end{vmatrix} + (X-1) \begin{vmatrix} X-4 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)\left(-\frac{9}{4} + X^2 - 5X + 3\right) \\ &= (X-1)\left(X^2 - 5X + \frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

Le discriminant de $X^2 - 5X + \frac{3}{4}$ est $22 > 0$, donc ce polynôme admet deux racines distinctes, nommément $\frac{5+\sqrt{22}}{2}$ et $\frac{5-\sqrt{22}}{2}$. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{1, \frac{5+\sqrt{22}}{2}, \frac{5-\sqrt{22}}{2}\right\}.$$

Comme $5 = \sqrt{25} > \sqrt{22}$, ces trois valeurs propres sont strictement positives, donc par la caractérisation spectrale la matrice A est définie positive.

Peu importe la méthode, la définie positivité de A permet de conclure que X étant non nul, on a : $4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz = X^\top AX > 0$, d'où le résultat.
Autre approche. J'ai suivi la philosophie du problème dans la résolution ci-dessus, mais on peut obtenir la stricte positivité bien plus naïvement en faisant apparaître une somme de carrés. En effet :

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz &= 4\left(x + \left(\frac{1}{4}y - \frac{3}{8}z\right)\right)^2 + y^2 + z^2 - 4\left(\frac{1}{4}y - \frac{3}{8}z\right)^2 \\ &= 4\left(x + \left(\frac{1}{4}y - \frac{3}{8}z\right)\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{7}{16}z^2 + \frac{3}{4}yz \\ &= 4\left(x + \left(\frac{1}{4}y - \frac{3}{8}z\right)\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{1}{4}z^2. \end{aligned}$$

Nous avons une somme de réels positifs, et il est alors facile de montrer que cette somme est nulle seulement si $z = y = x = 0$, ce qui est exclu.
Plus généralement, un algorithme dû à Gauß permet de ramener toute *forme quadratique* à une combinaison linéaire de carrés.

Q 22. La matrice S_n est symétrique réelle pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Étudions si elle vérifie le critère de Sylvester.

Notons $\Delta_n = \det(S_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous allons calculer Δ_n pour tout n par récurrence. En effet, en développant par rapport à la première colonne, puis le dernier déterminant obtenu ci-dessous par rapport à la première ligne, nous constatons que $(\Delta_n)_{n \geqslant 1}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \Delta_{n+2} = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3}\Delta_{n+1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$
$$= \sqrt{3}\Delta_{n+1} - \Delta_n,$$

c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\Delta_{n+2} - \sqrt{3}\Delta_{n+1} + \Delta_n = 0$. Les racines de l'équation caractéristique associée sont $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{\frac{i\pi}{6}}$ et $\frac{\sqrt{3}-i}{2} = e^{-\frac{i\pi}{6}}$. On en déduit l'existence de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \Delta_n = \alpha \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right).$$

Les égalités $\Delta_1 = \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ et $\Delta_2 = 2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}\beta}{2}$ impliquent après calculs : $\alpha = 1$, et : $\beta = \sqrt{3}$. D'où, pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi n}{6} - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi(n-2)}{6}\right). \end{aligned}$$

On en déduit les premières valeurs suivantes de Δ_n :

n	1	2	3	4	5
$\frac{\pi(n-2)}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Δ_n	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	1	0

On a $\Delta_5 = 0$, donc le 5$^{\text{e}}$ mineur principal de S_n n'est pas strictement positif dès que $n \geqslant 5$. En revanche, si $n \in [\![1, 4]\!]$, alors ce tableau de valeurs montre que S_n vérifie le critère de Sylvester et est donc définie positive.

En conclusion, la matrice symétrique S_n est définie positive si et seulement si : $n \in [\![1, 4]\!]$.