Concours Commun INP 2024

Épreuve de mathématiques I, MP, quatre heures

EXERCICE I

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie.

Q 1. Exprimer, pour k non nul, $P(X = k)$ en fonction de $P(X > k - 1)$ et de $P(X > k)$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$.

Démontrer le résultat de cours : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

Q 2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu.

Calculer, pour tout entier naturel k, $P(X \leqslant k)$, puis donner la loi de X.

Q 3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la **Q 1**, déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

EXERCICE II

On considère les équations différentielles :

$$\begin{array}{rcll} x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y & = & 1 & (E) \\ x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y & = & 0 & (H) \end{array}$$

On note $I =]0, +\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I.

Q 4. Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$.

Q 5. Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2}$.

Q 6. On note pour $x \in I$, $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x^2}$.

On admet dans cette question que $g \in S_I(E)$ et $h \in S_I(H)$.

Donner, sans calculs, l'ensemble $S_I(E)$.

Q 7. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}(H)$ (solutions de (H) sur $\mathbb{R}$) ?

PROBLÈME

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

Q 8. Question préliminaire

Si on admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Partie I

Q 9. On note, pour tout entier naturel n, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \mathrm{d}x$.

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n.

En déduire, pour tout entier naturel n, que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q 10. Déterminer sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \arcsin(x)$.

Q 11. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}$.

Q 12. Justifier que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} \mathrm{d}x$.

Q 13. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Partie II

Q 14. Donner sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, puis calculer l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\ln(x)}{x^2-1} \mathrm{d}x$.

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

Q 15. On pose pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(tx)}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Q 16. Établir que cette fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

Q 17. Réduire au même dénominateur l'expression $\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2 t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

Q 18. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

FIN