Pourquoi est-il si difficile de calculer le degré d'une blague mathématique?

Dimitri Karpov, Minos Libbouet, Roland Triedich

28 juin 2011

RÉSUMÉ

La recherche en rigologie s'axait essentiellement sur la recherche de blagues démesurément drôles, c'est-à-dire de degré arbitrairement grand dans le langage formel de la théorie de l'humour mathématique. L'objectif de l'article est de prouver que cette recherche ne peut fournir une suite infinie de blagues $(B_n)_{n\geq 0}$ telles que $\lim_{n\to\infty} \deg(B_n) = +\infty$. Et pour cause : le degré est borné. On discutera également des difficultés pour trouver une borne supérieure de l'ensemble des valeurs du degré, tout en fournissant une piste pour les recherches en ce sens.

ABSTRACT

Research in pun theory was led mainly by the research of enormously funny jokes, that is to say, jokes of arbitrarily large degree in the formal language of mathematical theory of humor. The aim of this paper is to prove that this research cannot provide an infinite sequence of jokes $(J_n)_{n\geq 0}$ such that $\lim_{n\to\infty} \deg(J_n) = +\infty$, since the degree is bounded. We also discuss difficulties in finding an upper bound of all values of the degree, while providing a path for further research in this direction.

Notions et exemples

La fonction à l'étude dans cet article, et bien connue des théoriciens en humour mathématique, est définie ainsi :

Définition 1 (Degré d'une blague) *La fonction degré* $\deg : \{\mathit{Blagues}\} \to \mathbb{N}$ *se définit par récurrence comme suit :*

- *si une blague* B *n'est pas mathématique, alors* $\deg(B) = 0$ *;*
- *sinon, si une blague* B *est obtenue à l'aide d'une blague* B' *avec un élément d'humour mathématique en plus, alors* $\deg(B) = \deg(B') + 1$.

Dit simplement, le degré mesure la subtilité de l'humour mathématique présent dans une blague, et mesure en un certain sens la qualité de la blague, bien que celle-ci dépende d'autres paramètres (qualité du conteur de la blague, choix de l'auditoire, légèreté, *etc.*). Ce degré n'est pas à confondre avec le degré d'une vanne quelconque, introduit par Moustarqui dans *Éléments de Vanne*. L'étude des cas où ces deux degrés coïncident est délicate, et reste un sujet actif de recherche.

Définition 2 (Blague très drôle) *Une blague B est dite très drôle si* $\deg(B) \geq 2$.

Exemple 1. La blague « Pince-mi et Pince-moi sont sur un bateau. Pince-mi tombe à l'eau. Qui reste ? » est une blague de degré 0.

Exemple 2. Considérons la blague B_1 = « *A comathematician is a device for turning cotheorems into ffee* », qu'on doit à Bernikov (1994). Elle s'inspire de la blague de Rényi B_2 = « Un mathématicien est une machine qui transforme le café en théorèmes », qui est de degré 1 ; elle joue sur le fait qu'un mathématicien est réputé pour carburer au café, son camarade Erdős en étant le parfait exemple. La blague B_1 gagne en subtilité mathématique, parce qu'elle invoque avec humour la notion de catégorie duale où, d'une part, les objets sont indiqués avec le préfixe co- (en gardant à l'esprit que coco- = $\emptyset$-), et d'autre part, les flèches vont dans l'autre sens. Donc $\deg(B_1) = \deg(B_2) + 1 = 2$.

Exemple 3. Rappelons le théorème de Caius Dutus, démontré en 314 avant JC :

Théorème 1 (Théorème de Caius Dutus) $81 = -100$.

Preuve. En effet, on sait que $X = 10$ et $IX = 9$. Alors $(IX)^2 = 81$, mais aussi $(IX)^2 = I^2X^2 = (-1) \cdot (100) = -100$. Nous sommes obligés de conclure que $81 = -100$. □

Cette blague est de degré 3. D'une part, elle joue sur le double sens de IX, qui représente à la fois le nombre 9 dans le système romain et le produit $I \cdot X$, par analogie avec la notation classique ab pour désigner le produit $a \cdot b$. D'autre part, elle joue sur la propriété injustifiée (et fausse) $(IX)^2 = I^2X^2$ par analogie avec l'identité $(ab)^2 = a^2b^2$ valable sur les entiers relatifs. Enfin, la blague gagne en degré en jouant de I comme s'il s'agissait du nombre complexe i, qui vérifie $i^2 = -1$. Bref, deg(théorème de Caius Dutus) $= 1 + 1 + 1 = 3$. Le lecteur en exercice vérifiera que cette blague est extrêmement amusante, du fait de son haut degré.

Remarque. Par convention, les blagues sans humour (telles que « Qu'est-ce qui est petit, jaune, et effrayant ? Un poussin avec une mitraillette ! ») ou les non-blagues (telles que « Le théorème de Cayley-Hamilton a été démontré par Frobenius. ») vérifient $\deg(B) = -1$. On peut donc aisément produire des blagues de degré positif à partir de blagues sans humour. Les blagues basées sur la question « Pourquoi la poule veut-elle traverser la route ? » en sont un parfait exemple.

Remarque. Pour l'exemple 1, il est important de noter que certains auteurs attribuent à cette blague le degré $\frac{1}{2}$, puisqu'elle se base sur quelques principes de logique et de théorie des ensembles (cardinalité des ensembles finis, principe du tiers exclu...), dans une certaine mesure. Il y a une dépendance entre le degré et la mesure sur un ensemble, sauf pour les blagues dites *démesurées*, pour lesquelles le comportement de la fonction degré est très chaotique.

Borne sur le degré, questions ouvertes

Une question naturelle se profile : est-ce que le degré d'une blague peut croître indéfiniment ? Auquel cas, il existerait des blagues arbitrairement drôles. Malheureusement, nous allons prouver le résultat suivant :

Théorème 2 *Le degré d'une blague est borné.*

Preuve. Soit $M = \sup_{B \in \{\text{Blagues}\}} \deg(B)$. Tout le monde s'accorde à dire que les blagues les plus courtes sont les meilleures. Alors, pour B de longueur, disons, supérieure à $l = 6\,307\,200\,000$ mots (une telle blague nécessiterait environ deux cents ans pour être contée, ce qui est évidemment trop long pour tenir son public en haleine), on a $\deg(B) < M$. Considérons à présent les blagues de longueur inférieure à l. On a le lemme suivant :

Lemme 1 *Il y a un nombre fini de blagues de longueur inférieure ou égale à l.*

En effet, il y a environ 200 000 entrées dans certains dictionnaires encyclopédiques français (voir [Aca]). Majorons le nombre de mots de la langue par 1 000 000. Certaines blagues jouent sur plusieurs langues, et il y aurait environ 7 000 langues (voir [Wik]), ce qu'on majore par 10 000 pour plus de garantie, et qui ont également au plus un million de mots, néologismes compris. Certaines blagues jouent aussi sur des permutations des lettres. Pour chaque mot donné, il y a (longueur du mot)! possibilités à considérer, et le mot le plus long du monde a moins de 200 000 caractères ; il s'agit du nom complet de la protéine Titin, qui est formé de 189 819 lettres. Bref, on peut effectuer la majoration suivante :

$$\text{card}(\{\text{Blagues de longueur au plus } l\}) \leq (200000! \cdot 1000000 \cdot 10000)^{6307200000} < +\infty,$$

et il y a bien un nombre fini de blagues de longueur inférieure ou égale à l.

Alors, si on note $\mathbb{B}$ l'ensemble des blagues dont il est question dans le lemme précédent, la valeur maximale du degré est parmi les valeurs de l'ensemble fini $\deg(\mathbb{B})$, donc M est finie. □

Même si tout espoir de trouver des blagues arbitrairement drôles est réduit à néant, ce théorème soulève d'autres questions. Par exemple :

Question 1. Quelle est la plus grande valeur possible de la fonction degré ?

Question 2. Pour quelle blague la fonction degré atteint-elle son maximum ?

Question 3. Comment décrire les ensembles $\deg^{-1}(\{0\})$ ou $\deg^{-1}(\{-\infty\})$? Sont-ils munis de la topologie grossière ? Est-ce que la topologie de $\deg^{-1}([n, M])$ est plus fine que celle de $\deg^{-1}([m, M])$ pour $M \geq n > m$ (voir notamment [Bol]) ?

Question 4. Est-ce que la fonction degré peut s'étendre en une fonction $\mathbb{F}_{un} \to \mathbb{N}$, où $\mathbb{F}_{un}$ est le corps à un élément ? Si oui, est-ce qu'elle reste bornée ?

À l'heure actuelle, aucun travail ne permet même de donner un bon majorant du degré, pour plusieurs raisons :

– même s'il est prouvé depuis plus d'un siècle qu'il existe des blagues mathématiques, il n'existe pas de preuve constructive de ces blagues, ni d'algorithme permettant de générer toutes les blagues mathématiques (ou simplement *des* blagues mathématiques) ;
– la preuve de la finitude de la fonction degré n'est pas effective.

Il y a de fortes raisons de penser que le cardinal de $\mathbb{B}$, majoré ci-dessus, est largement surestimé. En tout cas, les exemples ici traités montrent que $\sup_{B\in\{\text{Blagues}\}} \deg(B) \geq 3$. Une analyse détaillée de [Win] devrait permettre d'affiner cette inégalité, surtout si, effectivement, le cardinal de l'ensemble des blagues, avec la relation d'équivalence « $B \sim B' \Leftrightarrow B$ et B' sont des blagues de même nature » est fini et égal à 9 (Winckler, communication personnelle). Cela fera l'objet d'un article ultérieur.

Références

[Aca] Académie française, site internet.

[Bol] Shados Bolossus, *Topologie de l'ensemble des blagues ; densité dans l'ensemble des séquences de mots*, SMF, 2010.

[Wik] Wikipédia francophone, article *Langue*.

[Win] Winckler Bruno, *Blagues mathématiques et autres curiosités*, Ellipses, 2011.