TP : listes, et algèbre linéaire

Références : chapitre 8 du *Sagebook* pour l'algèbre linéaire (voir aussi 2.4.3 et 2.4.4), et chapitre 3.3 du *Sagebook* pour les opérations sur les listes.

Listes

Sage est riche en opérations sur les listes. Après avoir parcouru le *Sagebook* et pris connaissance des commandes les plus intéressantes, tentez de les appliquer à l'exercice qui suit.

Exercice 1. À l'aide des différentes opérations sur les listes, écrire un programme qui, de la façon la plus compacte possible :

- prend en entrée une liste d'entiers L et un entier k, et renvoie la liste L à laquelle on a fait subir une permutation circulaire des indices $i \mapsto i + k$;
- prend en entrée une liste, et renvoie la liste dont on ne retient que les éléments qui sont à un indice premier de la liste ;

`for k in S`

- prend en entrée un entier n, et renvoie la liste de tous les entiers inférieurs à n qui lui sont premiers ;

`filter`

- prend en entrée un entier n, et renvoie la liste des carrés parfaits inférieurs à n ;

`is_prime`

- prend en entrée un entier n, et renvoie la liste des nombres premiers inférieurs à n ;

`map`

- prend en entrée une liste $[a_0, \ldots, a_n]$, et renvoie la liste $[\cos(a_0), \ldots, \cos(a_n)]$;
- prend en entrée un entier k, et renvoie une liste avec une formule donnant $\sum_{n=1}^{N} n^{k'}$ pour tout $k' \leqslant k$;

`GF(q)`
`prime_powers`
`F.polynomial()`

- prend en entrée un entier n, et renvoie la liste des couples (q, P), où $q \leqslant n$ est la puissance d'un nombre premier, et $P \in \mathbb{F}_p[X]$ un polynôme primitif de $\mathbb{F}_q$ (c'est-à-dire un polynôme dont une racine engendre $\mathbb{F}_q$ sur $\mathbb{F}_p$) ;

`sum`

- prend en entrée une liste d'entiers, et renvoie la somme des entiers de cette liste ;
- prend en entrée une liste d'entiers, et renvoie la somme des entiers pairs de cette liste ;

`reduce`

- prend en entrée une liste $[a_0, \ldots, a_n]$ d'entiers, et renvoie le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$;

`factor`
`P.is_irreducible()`

- prend en entrée un nombre premier p et un entier $n \geqslant 1$, et renvoie la liste des diviseurs irréductibles de $X^n - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$;

Matrices et vecteurs

Exercice 2. On peut construire des matrices et des vecteurs par :

```
A = matrix([[1,2,3],[4,5,6]])
B = matrix(2,3,[1,2,1/2,-1,0,5])
v = vector([0,1,-1])
```

Comment récupérer les coefficients de A, de B, de v ? Que donnent `v*A`, `A*v`, `B*v` ? Que donnent les commandes `A.parent()`, `B.parent()` et `v.parent()` ? Que donnent `A.nrows(), A.ncols()` ?

Exercice 3. On veut maintenant construire des matrices ou des vecteurs à coefficients dans un anneau donné. Essayer les commandes suivantes (quels objets définissent-elles ? appliquer la méthode `parent` à chacun d'entre eux) :

```
w = vector(CC,[0,5])
C = matrix(QQ,A)
```

```
D = matrix(GF(5),A)
M23 = MatrixSpace(RR,2,3) ; E = M23([1,2,3,4,5,6])
M4 = MatrixSpace(CC,4) ; F = M4(1)
```

Exercice 4. On peut construire des matrices dont les coefficients vérifient une formule donnée. Par exemple :

```
G = matrix(QQ,4,lambda i,j: i-j)
v = vector(RR,[i^2 for i in [0..2]])
```

1. Construire la matrice de Hilbert de taille 5 (matrice carrée dont le coefficient en position (i, j) est $1/(i + j - 1)$), vue comme matrice à coefficients rationnels.
2. Que donne `G[[0,2,3],1]` ? Que donne `parent` appliqué à cet objet ? Essayer des variantes, comme `G[[1,1],[0]+[0]]` par exemple.

Opérations de l'algèbre linéaire

Exercice 5. Comment calculer la somme, le produit de deux matrices, la transposée, le déterminant, l'inverse ? Tester les commandes `kernel, right_kernel, image, row_module, column_module` sur une matrice. On comparera les résultats pour la matrice A de l'exercice 1, et la même matrice vue comme matrice à coefficients rationnels.

Exercice 6. Créer une matrice A et un vecteur v, et résoudre $Ax = v$ avec `A.solve_right()`. Que se passe-t-il si A n'est pas injective ? Si l'équation n'a pas de solution ?

Exercice 7.

1. Soit `A = matrix(QQ,3,[1,2,3,3,2,1,1,1,1])`. Tester :

   `characteristic_polynomial, minimal_polynomial, eigenvalues, eigenvectors_right, eigenspaces_right, eigenmatrix_right, jordan_form`

   sur A.
2. Même chose avec `B = matrix(QQ,2,[0,1,2,0])`. Que se passe-t-il ?
   On définit le corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, dans lequel $\sqrt{2}$ est représenté par a, avec :

   ```
   P = x^2-2
   K.<a> = NumberField(P)
   ```
3. Définir une matrice C comme étant la matrice B mais à coefficients dans K et réessayer les commandes précédentes.

`VectorSpace`
`random_element`
`subspace`
`basis`

Exercice 8. On définit l'espace vectoriel $V = \mathbb{F}_2^4$, et on choisit trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ aléatoirement.

1. Comment définir le sous-espace $W = \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}_2}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$? Comment en donner une base ?
2. Tirer un autre élément aléatoirement dans V et tester s'il appartient à W.
3. Construire le quotient de V par W et donner sa dimension.
4. Construire un deuxième sous-espace aléatoire W' de V à l'aide de deux vecteurs, et donner une base de l'intersection de W et W'.