TD – Matrices

Coût des opérations de base

Exercice 1. On fixe un anneau A. Donner le coût, en termes de nombre d'opérations dans l'anneau A et en fonction des dimensions des matrices, des calculs suivants :
- somme de deux matrices ;
- produit de deux matrices, d'une matrice par un vecteur colonne ;
- l'élévation d'une matrice carrée à une puissance m donnée.

Gauss et variantes

On part d'une matrice M carrée de taille n à coefficients dans un anneau A intègre (corps fini, $\mathbb{Z}$, anneau de polynômes..). L'objectif est, par des opérations élémentaires, de transformer M en une matrice triangulaire supérieure échelonnée.

Dans la suite, on notera $M^{(0)} = M$, et on essaiera d'obtenir une suite de matrices $(M^{(k)})_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ telle que $M^{(k)}$ ait tous ses coefficients sous-diagonaux des k premières colonnes nuls, et $M^{(k+1)}$ se déduise de $M^{(k)}$ par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

On note $M_{i,j}$ le coefficient de M situé ligne i et colonne j.

L'algorithme de Gauss sur un corps

On suppose ici que A est un corps. On effectue l'algorithme suivant :
On pose $M^{(0)} = M$, puis pour k allant de 0 à $n-2$ on effectue :

1. Si les lignes numéro $k+1$ à n de la matrice $M^{(k)}$ sont nulles, l'algorithme est terminé.
2. (a) Si la ligne $k+1$ de la matrice $M^{(k)}$ est nulle mais qu'il existe une ligne de numéro $> k+1$ non nulle, échanger la ligne $k+1$ avec une ligne non nulle de numéro $> k+1$.
   (b) Si $M^{(k)}_{k+1,k+1} = 0$, échanger la colonne $k+1$ avec une colonne de numéro $j > k+1$ telle que $M^{(k)}_{k+1,j} \neq 0$.
   (c) Calculer $c_k = 1/M^{(k)}_{k+1,k+1}$.
3. Pour j allant de $k+1$ à n, remplacer dans $M^{(k)}$ la ligne L_j par la ligne $L_j - c_k M^{(k)}_{j,k+1} L_{k+1}$.
4. La matrice obtenue à la suite de ces opérations est appelée $M^{(k+1)}$.

Exercice 2. Vérifier que la suite $(M^{(k)})$ vérifie bien les propriétés voulues. À quelle condition sur M n'a-t-on jamais rien à faire à l'étape (2) de l'algorithme ?

Exercice 3. On suppose d'abord que l'on n'a jamais rien à faire à l'étape (2) de l'algorithme.
1. Écrire les coefficients de $M^{(k+1)}$ en fonction de ceux de $M^{(k)}$.
2. Donner le coût de cet algorithme, en nombre d'opérations dans A.
3. On ne suppose plus que les pivots sont forcéments non nuls. Quel est le coût supplémentaire dû au fait que l'on doit chercher des pivots non nuls ?

Utilisations de l'algorithme de Gauss

Exercice 4. Expliquer comment utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre un système de la forme $MX = B$ pour un vecteur colonne B. Quel est le coût de ceci ?

Exercice 5.

1. Comment utiliser l'algorithme de Gauss pour calculer l'inverse de la matrice M (ou déterminer qu'elle n'est pas inversible) ?
2. On suppose qu'on a plusieurs systèmes à résoudre de la forme $MX_i = B_i$. À partir de combien de tels systèmes est-il plus rentable de calculer M^{-1} que de résoudre les systèmes un par un ?

Exercice 6. Comment utiliser l'algorithme pour calculer le déterminant de M ? Quel est le coût du calcul ?

Exercice 7. Montrer l'inégalité de Hadamard pour une matrice carrée M à coefficients complexes :

$$|\det(M)| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |M_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$$

On suppose maintenant que M est à coefficients entiers. Montrer qu'on peut calculer le déterminant de M de la façon suivante :

— trouver des nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$ de sorte que $\prod_i p_i > 2|\det(M)|$;

— calculer $\det(M)$ modulo p_i pour $1 \leqslant i \leqslant r$;

— utiliser le théorème chinois pour en déduire $\det(M)$.

Exercice 8. Donner des algorithmes permettant de calculer le rang de M, une base de son noyau, de son image, et donner le coût de chacun.

L'algorithme sans division

On suppose maintenant que A n'est pas un corps, et que l'on souhaite travailler uniquement dans A et pas dans son corps des fractions.

On remplace donc l'étape (3) de l'algorithme par :

3. Pour j allant de $k+1$ à n, remplacer la ligne L_j de $M^{(k)}$ par la ligne $M^{(k)}_{k+1,k+1} L_j - M^{(k)}_{j,k+1} L_{k+1}$.

Exercice 9.

1. Exprimer les coefficients de $M^{(k+1)}$ en fonction de ceux de $M^{(k)}$.
2. Exprimer le déterminant de $M^{(k+1)}$ en fonction de celui de $M^{(k)}$.
3. En déduire comment on peut utiliser l'algorithme pour calculer le déterminant de M.
4. En déduire un algorithme pour calculer le polynôme caractéristique d'une matrice M à coefficients dans un corps.

Exercice 10. On suppose que les coefficients de M sont d'une taille majorée par t. Donner une majoration de la taille des coefficients de $M^{(k)}$ en fonction de ceux de M.

La méthode de Gauss-Bareiss

La méthode précédente fait apparaître des coefficients qui peuvent devenir très grands. On présente donc une méthode qui est aussi sans division, mais pour laquelle les coefficients croissent moins vite.

On fixe une suite (c_k) d'éléments de A non nuls (dépendant de M) et on définit une suite $(M^{(k)})$ de matrices comme précédemment, sauf qu'on remplace l'étape 2 de l'algorithme par :

2. Pour j de $k+1$ à n, remplacer la ligne L_j de $M^{(k)}$ par $c_k^{-1}(M^{(k)}_{k+1,k+1} L_j - M^{(k)}_{j,k+1} L_{k+1})$.

La valeur $c_k = 1$ pour tout k correspond à l'algorithme sans division, et $c_k = M^{(k)}_{k+1,k+1}$ à l'algorithme de Gauss standard. On cherche donc une suite (c_k) telle que $M^{(k)}$ reste à coefficients dans A mais que ses coefficients ne deviennent pas trop gros.

On note $\delta^{[k]}(i,j)$ le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,k} & M_{1,j} \\ M_{2,1} & & \dots & & M_{2,j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ M_{k,1} & M_{k,2} & \dots & M_{k,k} & M_{k,j} \\ M_{i,1} & M_{i,2} & \dots & M_{i,k} & M_{i,j} \end{vmatrix}$$

et on convient que $\delta^{[0]}(1,1) = 1$.

Exercice 11.

1. Soit $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice par blocs avec A et D carrées et A inversible. Montrer que $\det(N) = \det(A)(\det(D - CA^{-1}B))$.
2. En déduire que si $i > k+1$ et $j > k+1$ on a
$$\delta^{[k+1]}(i,j)\delta^{[k+1]}(k+1,k+1) = \delta^{[k]}(k+1,k+1)\delta^{[k]}(i,j) - \delta^{[k]}(i,k+1)\delta^{[k]}(k+1,j).$$
On pose $c_k = \delta^{[k]}(k+1,k+1)$, et on note $(M^{(k)})$ la suite de matrices associée.
3. Montrer que $M^{(k)}$ est à coefficients dans A. On pourra vérifier que pour tout $i > k$ et $j > k$ on a $M^{(k)}(i,j) = \delta^{[k]}(i,j)$.
4. Montrer que pour calculer c_k, on n'a en fait pas besoin de calculer $\delta^{[k]}(k+1,k+1)$.

Exercice 12. On suppose ici que $A = \mathbb{Z}$, et que tous les coefficients de M sont de taille majorée par t. Montrer que tous les coefficients des $M^{(k)}$ ont une taille majorée par $n\left(\frac{1}{2}\log_b(n) + t\right) + 1$ (où b est la base où l'on travaille).

Exercice 13. Expliquer comment utiliser l'algorithme pour calculer le déterminant de M et son polynôme caractéristique. Quel est son coût ?

Polynôme caractéristique

On cherche à calculer le polynôme caractéristique χ_M d'une matrice M de taille n à coefficients dans l'anneau A. On suppose ici que A un anneau intègre dans lequel $n!$ est inversible.

Méthode par interpolation de Lagrange

Exercice 14. Montrer que la connaissance de $\det(M - x\mathrm{I})$, pour x entier allant de 0 à n, permet de déterminer χ_M. Quel est le coût de cette méthode en terme de nombre d'opérations dans A ?

Méthode de Le Verrier

Exercice 15. Rappeler les relations entre sommes de Newton et fonctions symétriques élémentaires d'une famille de n éléments de A.

Expliquer comment on peut retrouver χ_M à partir des traces des M^i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Quel est le coût de cette méthode de calcul de χ_M ?