Feuille 9 – Éléments entiers, anneaux intégralement clos

Dans tous les exercices de cette feuille, A désigne un anneau commutatif.

Exercice 1. Montrer que l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ est intégralement clos, mais non factoriel.

Exercice 2. Soit $A = \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3)$. Montrer que A est intègre, de corps de fractions isomorphe à $\mathbb{C}(T)$. En déduire que A n'est pas intégralement clos.

Exercice 3. On suppose A intègre. Montrer que si A est intégralement clos, alors $A[X]$ également.

Exercice 4. Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension de corps de dimension n. Soient $x \in K$, et $x_1, \ldots, x_n$ les racines du polynômes minimal de x sur $\mathbb{Q}$ (prises dans une clôture algébrique). L'endomorphisme $m_x : K \to K$ de multiplication par x est une application $\mathbb{Q}$-linéaire ; sa trace et son déterminant sont donc des éléments de $\mathbb{Q}$. On définit $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x) = \mathrm{Tr}(m_x)$ et $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x) = \det(m_x)$.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x) = [K : \mathbb{Q}(x)] \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{[K:\mathbb{Q}(x)]}$. En déduire que si x est entier sur $\mathbb{Z}$, alors $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x)$ et $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x)$ sont entiers.
2. Soit $x \in K$ un entier sur $\mathbb{Z}$. Montrer que $1/x$ est entier sur $\mathbb{Z}$ si, et seulement si $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x) = \pm 1$.
3. Soit p un nombre premier, et soit $\zeta_p = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. On pose $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$.
   (a) Montrer que $(1-\zeta_p)\mathbb{Z}[\zeta_p] \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ (on peut commencer par montrer que $p = \varepsilon(1-\zeta_p)^{p-1}$, où $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\zeta_p]^\times$).
   (b) Montrer que si $z = \sum_{i=0}^{p-2} a_i \zeta_p^i$ est entier sur $\mathbb{Z}$, alors $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}((1-\zeta_p)z)$ est divisible par p. En déduire que l'anneau des entiers de K est $\mathbb{Z}[\zeta_p]$.
4. On veut montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ est intégralement clos.
   (a) Montrer qu'il est entier sur $\mathbb{Z}$.
   (b) Soit $z = a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ un élément entier sur $\mathbb{Z}$. En calculant la trace de z, $\sqrt[3]{2}z$ et $(\sqrt[3]{2})^2 z$, montrer que $6z \in \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.
   (c) Montrer que $6a$, $6b$ et $6c$ sont des multiples de 6, et conclure.

Exercice 5. On suppose A intègre. Montrer que A est intégralement clos si, et seulement si $A_{\mathfrak{p}}$ est intégralement clos pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$.

Exercice 6. (Théorème de Kronecker) Soit $x \in \mathbb{C}$ un élément entier sur $\mathbb{Z}$. Notons $x_1, \ldots, x_d$ ses conjugués.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, le polynôme $P_n(X) = \prod_{i=1}^{d} (X - x_i^n)$ est à coefficients entiers.
2. Supposons que pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, on a $|x_i| \leqslant 1$. Démontrer que soit $x = 0$, soit tous ses conjugués sont des racines de l'unité (et donc x lui-même également).
3. En déduire que si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme unitaire dont toutes les racines complexes sont dans le disque unité, alors les facteurs irréductibles de P sont X et des polynômes cyclotomiques.

Exercice 7. (Anneau de valuation discrète) Un anneau A est de valuation discrète si c'est un anneau principal, et s'il possède exactement un idéal premier non nul (π).

1. Tous les idéaux non nuls de A sont de la forme (π^n) avec $n \in \mathbb{N}$; si $x \neq 0$ s'écrit $x = \pi^n u$ avec u inversible, on note $v(x) = n$ la valuation de x (et $v(0) = \infty$) ; elle ne dépend pas du choix de π. Si $x \in \mathrm{Frac}(A)$ est de la forme $\frac{a}{b}$, on pose $v(x) = v(a) - v(b)$.
   (a) Montrer que $v : \mathrm{Frac}(A)^* \to \mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes surjectif, et qu'on a l'inégalité $v(x+y) \geqslant \inf(v(x), v(y))$ pour tous $x, y \in \mathrm{Frac}(A)$.
   (b) Réciproquement, montrer que si K est un corps muni d'un morphisme surjectif $v : K^* \to \mathbb{Z}$ vérifiant $v(x+y) \geqslant \inf(v(x), v(y))$ pour tous $x, y \in K$, alors $A = v^{-1}(\mathbb{N})$ est un anneau de valuation discrète.
2. Montrer qu'un anneau est de valuation discrète si, et seulement s'il est local, noethérien, d'idéal premier engendré par un élément non nilpotent.
3. On suppose A intègre et noethérien.
   (a) Montrer que si A est de valuation discrète, et si $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{Frac}(A)$ sont des éléments tels que $v(x_i) > v(x_1)$ pour tout $i \geqslant 2$, alors $x_1 + \cdots + x_n \neq 0$.
   (b) Montrer que si A est local, d'idéal maximal $\mathfrak{m} \neq 0$, alors $\mathfrak{m}' = \{x \in \mathrm{Frac}(A) \mid x\mathfrak{m} \subseteq A\}$ est un A-module de type fini, et que soit $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = A$, soit $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$.
   (c) Montrer que le second cas implique $\mathfrak{m}' = A$ si A est intégralement clos, et que $\mathfrak{m}' \neq A$ si A possède exactement un idéal premier non nul.
   (d) En déduire que A est de valuation discrète si, et seulement s'il possède exactement un idéal premier non nul et est intégralement clos.

Exercice 8. (Théorie de Galois et anneaux intégralement clos)

1. Soient $A \subseteq B$ des anneaux commutatifs, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, et $\mathfrak{P}$ un idéal premier de B. On dit que $\mathfrak{P}$ divise $\mathfrak{p}$, ou que $\mathfrak{P}$ est au-dessus de $\mathfrak{p}$, si $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$.
   (a) Montrer que l'injection naturelle $A \hookrightarrow B$ induit une injection $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow B/\mathfrak{P}$, et que si B est entier sur A, alors $B/\mathfrak{P}$ est entier sur $A/\mathfrak{p}$.
   (b) Montrer que si B est entier sur A, et si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, alors $\mathfrak{p}B \neq B$ (indication : on se ramène au cas où A est local ; on raisonne alors par l'absurde à l'aide du lemme de Nakayama). En déduire l'existence d'un idéal premier $\mathfrak{P}$ de B qui divise $\mathfrak{p}$.
   (c) Montrer que si B est entier sur A, et $\mathfrak{P}$ un idéal premier de B qui divise un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, alors $\mathfrak{P}$ est maximal si, et seulement si $\mathfrak{p}$ est maximal.
2. Supposons A intègre, de corps de fractions K. Soit L/K une extension galoisienne, de groupe de Galois G. On note B la clôture galoisienne de A dans L. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A.
   (a) Montrer que si $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ sont deux idéaux premiers de B qui divisent $\mathfrak{p}$, alors il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}'$ (indication : raisonner par l'absurde, et produire un élément de B qui appartient à tous les conjugués $\sigma(\mathfrak{P})$ pour $\sigma \in G$, mais à aucun conjugué $\sigma(\mathfrak{P}')$ pour $\sigma \in G$, puis considérer sa norme, *cf.* exercice 4).
   (b) En déduire que si A est intégralement clos, et si E/K est une extension finie séparable, alors il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premiers de la clôture intégrale de A dans E qui divisent $\mathfrak{p}$.
   (c) Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de B divisant $\mathfrak{p}$. On définit $\mathrm{D}_{\mathfrak{P}}$ comme le stabilisateur de $\mathfrak{P}$ (pour l'action de G sur les idéaux premiers de B divisant $\mathfrak{p}$). Montrer que le corps des points fixes de $\mathrm{D}_{\mathfrak{P}}$ est la plus petite extension intermédiaire E de L/K telle que $\mathfrak{P}$ soit l'unique idéal premier de B divisant $\mathfrak{P} \cap E$.