## Feuille 8 – Anneaux, modules localisés

Dans tous ces exercices, $A$ est un anneau commutatif et $S$ une partie multiplicative de $A$.

**Exercice 1.** Soit $\phi_S : A \to S^{-1}A$ le morphisme de localisation. Montrer que si l'image de $S$ dans $A/\ker(\phi_S)$ est formée d'éléments inversibles, alors $S^{-1}A \simeq A/\ker(\phi_S)$.

**Exercice 2.** Décrire ces anneaux localisés par rapport à des idéaux premiers : $\mathbb{Z}_{(p)}$, $(\mathbb{Z}^2)_{\mathbb{Z}\times\{0\}}$, $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})_{(2)}$, $\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})_{I_0}$, où $I_0$ est l'idéal des fonctions continues s'annulant en 0.

**Exercice 3.** Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel, et soit $p$ un diviseur premier de $n$. Décrire $S^{-1}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, où $S = \{p^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

**Exercice 4.** Supposons que $S$ ne contienne pas 0.

1. Montrer que si $A$ est euclidien (respectivement : principal, factoriel), alors $S^{-1}A$ l'est aussi.
2. Supposons que $A$ soit de plus un anneau intègre de corps des fractions $K$. Montrer qu'il existe une application canonique $\varphi : S^{-1}A \to K$, puis que celle-ci est injective.

**Exercice 5.** Démontrer que l'anneau $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ est un anneau principal.

**Exercice 6.** Supposons que $A$ soit intègre. Démontrer que l'on a alors $A = \bigcap\limits_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} = \bigcap\limits_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$, où $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{m}$ parcourent respectivement l'ensemble des idéaux premiers et maximaux de $A$.

**Exercice 7.** Soit $M$ un $A$-module de type fini. Montrer que $S^{-1}M = 0$ si, et seulement s'il existe $s \in S$ tel que $sM = 0$.

**Exercice 8.** Soit $I$ un idéal de $A$. Soit $M$ un $A$-module tel que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$ contenant $I$, on ait $M_{\mathfrak{m}} = \{0\}$. Montrer que $M = IM$.

**Exercice 9.** On rappelle que $\sqrt{(0)}$ est l'ensemble des éléments nilpotents de $A$, et on l'appelle le nilradical de $A$ (voir feuille 1). On dit que $A$ est réduit si $\sqrt{(0)} = \{0\}$.

1. Montrer que $\sqrt{(0)}$ est un idéal de $A$.
2. On veut montrer que $\sqrt{(0)}$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de $A$.
   (a) Montrer que $\sqrt{(0)}$ est contenu dans chacun des idéaux premiers de $A$.
   (b) Soit $x \in A$ non nilpotent. On considère $S_x = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$. Montrer qu'il existe un idéal maximal parmi les idéaux de $A$ qui ne rencontrent pas $S_x$, et que cet idéal est premier.
   (c) En déduire que $\sqrt{(0)}$ est l'intersection des idéaux premiers de $A$.
3. (a) Montrer que $S^{-1}\sqrt{(0)}$ est le nilradical de $S^{-1}A$.
   (b) Montrer que $A$ est réduit si et seulement si $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$.

**Exercice 10.**

1. Soient $A_1$ et $A_2$ deux anneaux, et $A$ l'anneau $A_1 \times A_2$.
   (a) Soit $S = \{(1,0),(1,1)\}$. Montrer que $S^{-1}A = A_1$.
   (b) Notons $p_1 : \begin{cases} A & \to & A_1 \\ (a_1,a_2) & \mapsto & a_1 \end{cases}$. Montrer que $A_1$ est plat sur $A$ pour ce morphisme.
2. Soit $A$ un anneau, et $I$ un idéal de $A$. Montrer que si $A/I$ est plat sur $A$, alors $I = I^2$.
3. Soit $I$ un idéal de type fini d'un anneau $A$, tel que $I = I^2$. Montrer qu'il existe $e \in I$ idempotent (c'est-à-dire $e^2 = e$), et que $e$ engendre $I$.

4. Soit $e$ un élément idempotent de $A$. Montrer que $eA$ et $(1-e)A$ sont naturellement munis de structures de $A$-algèbre, et que $A$ est isomorphe à $eA \times (1-e)A$.
5. Soit $A$ un anneau noethérien, $I$ un idéal de $A$ tel que $A/I$ soit plat sur $A$. Montrer que $A$ est comme dans la première question avec $I = \ker(p_1)$.

**Exercice 11.** On dit que $A$ est absolument plat si tout $A$-module est plat.

1. Montrer que si $A$ est un corps alors $A$ est absolument plat.
2. Montrer que si $A$ est absolument plat, alors $S^{-1}A$ est absolument plat.
3. Supposons $A$ local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, avec $\mathfrak{m} \neq 0$. Montrer que $A/\mathfrak{m}$ n'est pas plat sur $A$.
4. En déduire qu'un anneau local est absolument plat si et seulement si c'est un corps.
5. On revient à $A$ général. Montrer que $A$ est absolument plat si et seulement si pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$, $A_{\mathfrak{m}}$ est un corps.
6. Donner un exemple d'anneau absolument plat qui n'est pas un corps.

**Exercice 12.** Soient $S$ et $T$ deux parties multiplicatives de $A$. On suppose que $S \subseteq T$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. On a une bijection naturelle entre $S^{-1}A$ et $T^{-1}A$.
2. Pour tout $t \in T$, il existe $a \in A$ tel que $at \in S$.
3. Tout idéal premier qui rencontre $T$ rencontre aussi $S$.

**Exercice 13.** On note $S_0$ l'ensemble des éléments non nuls de $A$ qui ne sont pas diviseurs de zéro.

1. Montrer que $S_0$ est une partie multiplicative de $A$.
2. Montrer que l'application canonique $\phi_0 : A \to S_0^{-1}A$ est injective.
3. Montrer que si l'application canonique $\phi_S : A \to S^{-1}A$ est injective, alors $S \subseteq S_0$.
4. Montrer que tout élément de $S_0^{-1}A$ qui n'est ni nul ni diviseur de zéro est inversible.
5. Calculer $S_0^{-1}A$ dans les cas $A = \mathbb{Z}^2$, et $A$ de cardinal fini.

**Exercice 14. (Théorème de Mordell-Weil faible sur $\mathbb{Q}$)** Pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}$ distincts, on admet que l'ensemble des points $P(X,Y,Z)$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{Q})$ vérifiant $Y^2Z = (X-\alpha_1 Z)(X-\alpha_2 Z)(X-\alpha_3 Z)$ est un groupe $(E(\mathbb{Q}),+)$ d'élément neutre $O(0{,}1{,}0)$ (le « point à l'infini »), où la loi est caractérisée par la condition : $P+Q+R=O \Leftrightarrow P$, $Q$ et $R$ sont alignés. On pose $[2]P = P+P$ pour $P \in E(\mathbb{Q})$.

On veut montrer que $E(\mathbb{Q})/[2]E(\mathbb{Q})$ est fini. On ne raisonne qu'avec les coordonnées affines.

1. Expliciter une partie $S \subseteq \mathbb{Z}$ telle que les $\alpha_i - \alpha_j$, pour $i \neq j$, soient inversibles dans $S^{-1}\mathbb{Z}$.
2. Montrer que si $P(x,y) \in E(\mathbb{Q})$, alors il existe $A, C, E \in S^{-1}\mathbb{Z}$ tels que $(x,y) = \left(\frac{A}{E^2}, \frac{C}{E^3}\right)$, avec $A$ premier avec $E$ et $C^2 = (A-\alpha_1 E^2)(A-\alpha_2 E^2)(A-\alpha_3 E^2)$.
3. En déduire que pour tout $i \in \{1{,}2{,}3\}$, il existe $(\varepsilon_i, t_i) \in (S^{-1}\mathbb{Z})^\times \times S^{-1}\mathbb{Z}$ tel que $x - \alpha_i = \varepsilon_i t_i^2$.
4. Montrer que l'application $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : E(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ définie par
$$\psi_i(P) = \begin{cases} x(P) - \alpha_i & \text{si } P \neq O \text{ et } x(P) \neq \alpha_i, \\ (\alpha_i - \alpha_j)(\alpha_i - \alpha_k) & \text{si } x(P) = \alpha_i, \text{ où } \{j,k\} = \{1{,}2{,}3\} \setminus \{i\}, \\ 1 & \text{si } P = O, \end{cases}$$
est un morphisme de groupes, et que son image est finie ($\mathbb{Q}^{*2}$ est l'ensemble des carrés de $\mathbb{Q}^*$).
5. Montrer que $\ker(\psi) = [2]E(\mathbb{Q})$, et conclure.

Ce résultat équivaut au théorème de Mordell-Weil sur $\mathbb{Q}$ : le groupe $(E(\mathbb{Q}),+)$ est de type fini.