Feuille 7 – Modules plats, algèbres symétriques et extérieures

Dans cette feuille, A et K désignent respectivement un anneau et un corps commutatifs.

Exercice 1. Soit M un A-module. On dit qu'un A-module N est M-plat lorsque l'assertion suivante est vérifiée : pour toute application A-linéaire injective $\nu : M_1 \to M$, le morphisme de A-modules $\mathrm{id}_N \otimes \nu : N \otimes_A M_1 \to N \otimes_A M$ est encore injectif.

1. Soit N un A-module. Démontrer que le A-module N est M-plat si et seulement s'il satisfait à la condition suivante : pour tout sous-A-module de type fini M_0 de M, l'application A-linéaire canonique $\mathrm{id}_N \otimes \iota : N \otimes_A M_0 \to N \otimes_A M$ est injective.
2. Supposons que N soit un A-module M-plat. Démontrer que pour tout sous-A-module M_0 de M, le A-module N est M_0-plat.

Exercice 2. Soit M un A-module.

1. Démontrer que M est plat sur A si, et seulement si l'application A-linéaire canonique $M \otimes_A I \to M$ est injective pour tout idéal de type fini I de A.
2. En déduire que si A est un anneau principal, alors un A-module M est plat si, et seulement s'il est sans torsion sur A.

Exercice 3.

1. Soit M un A-module plat.
   (a) Montrer que pour tout idéal I de A, le (A/I)-module M/IM est plat.
   (b) Montrer que pour toute A-algèbre commutative B, le B-module $M \otimes_A B$ est plat.
   (c) Soient N_1, N_2 deux sous-A-modules d'un A-module N quelconque.
      i. Démontrer que l'on dispose d'une suite exacte courte de A-modules de la forme
      $$0 \longrightarrow N_1 \cap N_2 \longrightarrow N \longrightarrow (N/N_1) \otimes (N/N_2) \longrightarrow 0.$$
      ii. Démontrer qu'en tant que sous-A-modules de $N \otimes_A M$, on peut naturellement identifier les A-modules $(N_1 \cap N_2) \otimes_A M$ et $(N_1 \otimes_A M) \cap (N_2 \otimes_A M)$.
2. Supposons A intègre. Montrer que $\mathrm{Frac}(A)$ est un A-module plat.
3. Supposons que l'on dispose d'une suite exacte courte de A-modules de la forme
   $$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0,$$
   avec M_2 plat sur A. Démontrer que M est plat sur A si et seulement si M_1 l'est.
4. Notons M l'ensemble des paires $(a, -a)$ avec a parcourant A.
   (a) Vérifier que M est un sous-A-module de A^2. Notons N_1, N_2 les sous-A-modules de A^2/M obtenus par projection des facteurs directs de A^2.
   (b) Démontrer que N_1 et N_2 sont des A-modules plats.
   (c) Le A-module $N_1 \cap N_2$ est-il plat sur A ?

Exercice 4.

1. Soit M un A-module plat. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes :
   — pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, on a $\mathfrak{m}M \neq M$;
   — pour tout A-module non nul N, le A-module $M \otimes_A N$ est non nul ;

— si $f : N_1 \to N_2$ est une application A-linéaire entre A-modules, alors pour tout M, l'application $f \otimes \mathrm{id} : N_1 \otimes M \to N_2 \otimes M$ est un isomorphisme seulement si f en est un.

Si M vérifie ces propriétés, on dit qu'il est *fidèlement plat* sur A.

2. Donner un exemple explicite de module plat mais non fidèlement plat.
3. Démontrer que tout A-module libre non nul est fidèlement plat.

Exercice 5. Soient M, N deux A-modules de type fini. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on dispose d'un isomorphisme de A-modules de la forme $\Lambda^n(M \oplus N) \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} \left(\Lambda^k M \otimes_A \Lambda^{n-k} N\right)$.

Exercice 6. Soit $\varphi : M \to N$ une application A-linéaire injective entre A-modules libres. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, l'application $\Lambda^k \varphi : \Lambda^k M \to \Lambda^k N$ est injective.

Exercice 7. Soit M un A-module libre de rang $n \geqslant 1$ dont on fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$.

1. Notons $\Delta : M^n \to A$ la forme n-linéaire alternée vérifiant $\Delta(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Montrer que pour tous éléments m_1, …, m_n de M et tout endomorphisme $f \in \mathrm{End}_A(M)$, on a
$$\Delta(f(m_1), \ldots, f(m_n)) = (\det(f))\Delta(m_1, \ldots, m_n).$$
2. Notons $\tilde{\Delta}$ l'application envoyant un élément $m \in M$ sur l'application $\tilde{\Delta}(m) := \Delta(m, \ldots)$.
   (a) Vérifier que pour tout élément $m \in M$, l'application $\tilde{\Delta}(m)$ est une application $(n-1)$-linéaire alternée.
   (b) Démontrer que $\tilde{\Delta}$ est un isomorphisme de A-modules.
3. Soit $f : M \to M$ une application A-linéaire. Comparer les applications $\tilde{\Delta} \circ f$ et $(\det(f))\tilde{\Delta}$.

Exercice 8. Calculer les $\mathbb{Z}$-modules $\mathrm{Sym}^n(M)$ et $\Lambda^n(M)$, $n \geqslant 0$, ainsi que la $\mathbb{Z}$-algèbre graduée $\mathrm{Sym}(M)$, dans les cas suivants :

1. $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
2. $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;
3. $M = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ avec $r \geqslant 1$.

Exercice 9. Soit M un A-module libre de rang $n \geqslant 1$.

1. Démontrer que pour toute application A-linéaire $f : M \to M$ et tous scalaires a, $b \in A$, on a : $\det(a\mathrm{id}_M + bf) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k \mathrm{tr}(\Lambda^k f)$.
2. Soit K un corps et soit V un espace vectoriel sur K de dimension finie $n \geqslant 1$. Démontrer que le polynôme caractéristique d'un élément $f \in \mathrm{End}_K(V)$ est $\chi_f = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{tr}(\Lambda^{n-k} f) X^k$.
3. Retrouver la formule usuelle du polynôme caractéristique lorsque $n = 2$.

Exercice 10. Soient M, N deux A-modules de type fini.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on dispose d'un isomorphisme naturel de A-modules de la forme : $\mathrm{Sym}^n(M \oplus N) \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} \left(\mathrm{Sym}^k(M) \otimes_A \mathrm{Sym}^{n-k}(N)\right)$.
2. En déduire l'existence d'un isomorphisme de A-algèbres (graduées) $\mathrm{Sym}(M) \otimes_A \mathrm{Sym}(N) \simeq \mathrm{Sym}(M \oplus N)$.