Feuille 6 – Modules projectifs, produits tensoriels

Dans cette feuille, A et K désignent respectivement un anneau et un corps commutatifs.

Exercice 1. Soit $I \subseteq \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'idéal des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $f^{-1}(\{0\})$ soit un voisinage de 0 dans $[0,1]$.

1. Exhiber un système dénombrable de générateurs de l'idéal I, et en déduire une application surjective $\varphi : \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})^{(\mathbb{N})} \to I$.
2. Montrer que φ admet un inverse à droite $I \to \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})^{(\mathbb{N})}$, et en déduire que I est un $\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$-module projectif.
3. Montrer que I n'est pas un $\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$-module libre.

Exercice 2. On dit que M est un A-module de présentation finie s'il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels qu'on ait une suite exacte $A^m \to A^n \to M \to 0$.

Montrer qu'un A-module de présentation finie est projectif si, et seulement s'il est plat.

Exercice 3. Soit M un A-module projectif. Montrer que pour tout A-module B, le B-module $B \otimes_A M$ est projectif.

Exercice 4. Montrer que si M est un A-module libre de rang $n \geqslant 2$ et de base $(e_1, \ldots, e_n)$, alors l'élément $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 \in M \otimes_A M$ n'est pas un tenseur simple.

Exercice 5. Soient M_1, N_1, M_2, N_2 des A-modules et soient $u_1 : M_1 \to N_1$ et $u_2 : M_2 \to N_2$ deux applications A-linéaires. On rappelle qu'il existe une unique application A-linéaire $u_1 \otimes u_2 : M_1 \otimes_A M_2 \to N_1 \otimes_A N_2$ telle que pour tout $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$:

$$(u_1 \otimes u_2)(m_1 \otimes m_2) = u_1(m_1) \otimes u_2(m_2).$$

1. Montrer que pour toutes applications A-linéaires $w_1 : N_1 \to P_1$ et $w_2 : N_2 \to P_2$, on a

$$(w_1 \circ u_1) \otimes (w_2 \circ u_2) = (w_1 \otimes w_2) \circ (u_1 \otimes u_2).$$

2. Démontrer que si u_1 et u_2 sont surjectives, alors $u_1 \otimes u_2$ est elle aussi surjective.
3. Dispose-t-on d'une propriété analogue pour l'injectivité ?

Exercice 6. Supposons A intègre, de corps des fractions K.

1. Soient V et W deux K-espaces vectoriels. Justifier que pour tous éléments non nuls $v \in V$ et $w \in W$, on a $v \otimes w \neq 0$.
2. Soit M un A-module.
   (a) Montrer que l'on dispose d'un isomorphisme de A-modules $K \otimes_A M \simeq K \otimes_A (M/M_{\mathrm{tors}})$.
   (b) En déduire que M_{tors} est le noyau de l'application A-linéaire naturelle $M \to K \otimes_A M$ envoyant $m \in M$ sur $1 \otimes m$.
3. Soient M et N deux A-modules. Montrer que pour tous éléments $m \in M$ et $n \in N$ qui ne sont pas de A-torsion, on a $m \otimes n \neq 0$.

Exercice 7. Supposons A intègre, de corps des fractions K.

1. Montrer que pour tout K-espace vectoriel V, le A-module $K \otimes_A V$ est isomorphe à V.
2. Soient V et W deux espaces vectoriels sur K.

(a) Montrer que les structures de K-espace vectoriel sur $V \otimes_A W$ respectivement définies par la multiplication sur V et par la multiplication sur W sont les mêmes.

(b) En déduire que le K-espace vectoriel $V \otimes_A W$ est naturellement isomorphe à $V \otimes_K W$.

(c) Ces assertions restent-elles valables si K est un corps arbitraire contenant A ?

Exercice 8. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Décrire les produits tensoriels suivants :

$$\mathbb{Z}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Exercice 9. Soient X un espace topologique compact et Y un espace vectoriel réel normé. Montrer que l'application linéaire canonique $\mathrm{C}^0(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} Y \to \mathrm{C}^0(X, Y)$ est une injection, dont l'image est le sous-espace vectoriel réel des applications continues $f : X \to Y$ telles que $\mathrm{Im}(f)$ soit contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de Y.

Exercice 10. Soit $A \to R$ un morphisme d'anneaux commutatifs. Montrer que pour tous A-modules M et N, il existe un unique isomorphisme de R-modules $R \otimes_A (M \otimes_A N) \simeq (R \otimes_A M) \otimes_R (R \otimes_A N)$ envoyant $r \otimes (m \otimes n)$ sur $r((1 \otimes m) \otimes (1 \otimes n))$.

Exercice 11. Soient M, N deux A-modules. Montrer que $\sum_i m_i \otimes n_i \in M \otimes_A N$ est nul si, et seulement si pour tout A-module P et toute application bilinéaire $f : M \times N \to P$, on a $\sum_i f(m_i, n_i) = 0$.

Exercice 12. Si $f : A^n \to A^n$ est une application A-linéaire, on note $\chi_f(X) = \det(X \cdot \mathrm{Id}_{A^n} - f) \in A[X]$ le polynôme caractéristique de f. On veut montrer que le théorème de Cayley-Hamilton pour A un corps l'implique pour tout A.

1. Redémontrer le théorème de Cayley-Hamilton si A est un anneau intègre.
2. Redémontrer le théorème de Cayley-Hamilton si A est un anneau commutatif arbitraire.