Feuille 5 – Réduction des endomorphismes, modules projectifs

Dans cette feuille, K désigne un corps commutatif.

Exercice 1.

1. Soit $P \in K[X]$ unitaire. Montrer que l'application K-linéaire $\mu_X : K[X]/(P) \to K[X]/(P)$ de multiplication par X admet P pour polynôme minimal.
2. Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E, et $P_1|\cdots|P_s$ ses invariants de similitude. Il existe $(F_1,\dots,F_s)$ des sous-espaces vectoriels de E, stables par u, et tels que :
   - $E = \bigoplus_{i=1}^{s} F_i$;
   - pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, $\dim(F_i) = \deg(P_i)$;
   - pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, l'endomorphisme $u_{|F_i}$ de F_i a pour polynôme minimal P_i.
3. En déduire que si $P_1|\cdots|P_s$ est la suite des invariants de similitude d'un endomorphisme u, alors le polynôme minimal de u est P_s.
4. Décrire la matrice de l'endomorphisme μ_X de $K[X]/(P)$ dans la base $(\bar{1},\bar{X},\dots,\bar{X}^{n-1})$. En déduire que pour tout endomorphisme u du K-espace vectoriel E, il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs formés de matrices compagnons.

Exercice 2. Quels sont les invariants de similitude :
- d'une homothétie ?
- d'une transvection ?
- d'un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres distinctes ?
- d'un projecteur ?
- d'un bloc de Jordan ?

Exercice 3. Donner la liste des invariants de similitude, ainsi que le polynôme minimal, des matrices de $\mathrm{M}_6(\mathbb{Q})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 9 & 13 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

1. Déterminer toutes les classes de similitude d'endomorphismes de $\mathbb{Q}^5$ de polynôme caractéristique $(X^2-2)(X-1)^3$ (on donnera un représentant par classe).
2. Déterminer toutes les classes de similitude d'endomorphismes de $\mathbb{Q}^5$ de polynôme minimal $(X-2)^3$ (on donnera un représentant par classe).

Exercice 5. Déterminer le nombre de classes de similitude d'endomorphismes de K^8 de polynôme caractéristique $(X^2+1)^2$, lorsque $K \in \{\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\}$.

Exercice 6. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On note $\mathrm{C}(u)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u, et $P_1|P_2|\cdots|P_s$ la suite des invariants de similitude de u. Montrer que :

$$\dim_K(\mathrm{C}(u)) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant s} \min(\deg(P_i), \deg(P_j)) = \sum_{j=1}^{s} (2s - 2j + 1) \deg(P_j).$$

Exercice 7. Lorsque K est algébriquement clos, montrer que le nombre d'invariants de similitude d'un endomorphisme u d'un K-espace vectoriel de dimension finie est égal au maximum des dimensions des sous-espaces propres de u.

Exercice 8. Pour chacune des deux matrices complexes suivantes, déterminer si elle est semblable à une matrice à coefficients réels et, le cas échéant, donner un représentant à coefficients réels de sa classe de similitude :

$$M_1 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $d \geqslant 1$.

1. On suppose que $d \leqslant 2$. Montrer que deux endomorphismes de E sont semblables si et seulement s'ils ont même polynôme minimal.
2. On suppose que $d = 3$. Montrer que deux endomorphismes de E sont semblables si et seulement s'ils ont mêmes polynômes minimal et caractéristique.
3. Le résultat de la question précédente est-il vrai lorsque $d \geqslant 4$?

Exercice 10. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) l'endomorphisme u est cyclique ;
(ii) tout endomorphisme de E commutant avec u est un polynôme en u.

Exercice 11. Lorsque K est algébriquement clos, montrer que deux endomorphismes u et v d'un K-espace vectoriel E de dimension finie sont semblables si et seulement si, pour tout $\lambda \in K$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $\mathrm{rg}(u - \lambda \mathrm{id}_E)^n = \mathrm{rg}(v - \lambda \mathrm{id}_E)^n$.

Exercice 12. On notera $S_{\mathbb{C}}(A)$ la classe de similitude d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Une classe de similitude peut-elle être ouverte ?
2. Montrer que $S_{\mathbb{C}}(A)$ est connexe.
3. Pour quelles A la classe $S_{\mathbb{C}}(A)$ est-elle bornée ?
4. Montrer que si A est inversible, alors $\overline{S_{\mathbb{C}}(A)} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (l'ensemble $\overline{S_{\mathbb{C}}(A)}$ désigne l'adhérence de $S_{\mathbb{C}}(A)$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$).
5. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $S_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée.
6. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $0 \in \overline{S_{\mathbb{C}}(A)}$.
7. Qu'advient-il des résultats précédents si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 13.

1. Montrer que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$ n'est pas projectif.
2. Soient A l'anneau des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques, et P le A-module formé des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x + 2\pi) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que P est projectif de type fini sans être libre : on a $P \oplus P \simeq A^2$.