Feuille 4 – Modules sur un anneau principal

Dans cette feuille, A désigne un anneau commutatif.

Exercice 1. Trouver une matrice diagonale D et deux matrices P et Q de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ telles que $D = PBQ$, avec :

$$B = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 75 & -41 & 13 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

1. Donner une base de $\mathbb{Z}^2$ adaptée au sous-module $N = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a + b \text{ est pair}\}$.
2. Même question avec le sous-module de $\mathbb{Z}^3$ engendré par les vecteurs $(4, -2, 0)$, $(2, -2, 2)$, $(-3, 0, 3)$.

Exercice 3. Déterminer l'image et le noyau de $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 12 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,4}(\mathbb{Z})$.

Exercice 4. Soient M un groupe abélien libre de rang n et f un endomorphisme de M. Montrer que le sous-groupe $f(M)$ est d'indice fini si, et seulement si, f est injectif, et que dans ce cas l'indice est égal à $|\det(f)|$.

Exercice 5. Supposons A principal, et soient $a, b \in A$ deux éléments non nuls. Montrer que l'on a un isomorphisme de A-modules :

$$A/aA \times A/bA \simeq (A/\mathrm{pgcd}(a, b)) \times A/(\mathrm{ppcm}(a, b)).$$

Exercice 6. Décomposer le nombre $n = 15125$ en facteurs premiers puis calculer les facteurs invariants du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de groupes abéliens d'ordre 24 ?

Exercice 8. Montrer qu'un anneau intègre et noethérien A est principal si et seulement si tout module de type fini sans torsion sur A est libre.

Exercice 9. Un A-module M est dit indécomposable lorsqu'il est non nul et lorsque pour tous sous-modules P et Q de M, l'égalité $M = P \oplus Q$ implique $P = 0$ ou $Q = 0$.

Si A est un anneau principal, montrer que les A-modules de type fini indécomposables sont, à isomorphisme près, A et les A-modules $A/(p^n)$, où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et p est un élément irréductible de A.

Exercice 10. Supposons A principal, et soit M un A-module libre de rang fini. À quelle condition sur ses facteurs invariants un sous-module N est-il un facteur direct de M ?

Exercice 11. Supposons A principal, et soit M un A-module de torsion. Pour tout irréductible $p \in A$, on appelle *composante p-primaire* de M le sous-module $M(p^\infty) = \{x \in M \mid \exists n \geqslant 1; p^n x = 0\}$.

1. Soit Σ un ensemble de représentants des irréductibles de A. Montrer qu'on a la *décomposition en composantes primaires* $M = \bigoplus_{p \in \Sigma} M(p^\infty)$.
2. Montrer que si M est de type fini, on a :
   (a) pour tout p sauf un nombre fini, $M(p^\infty) = 0$;

(b) pour tout p, il existe $n \geqslant 0$ tel que $M(p^\infty) = M(p^n)$.

3. Donner des contre-exemples pour 2.(a) et 2.(b) lorsque M n'est pas supposé de type fini.

Exercice 12. Soit M un $\mathbb{Z}$-module de type fini tel qu'il existe $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ vérifiant $J^2 = -\mathrm{id}_M$.

1. Munir M d'une structure de $\mathbb{Z}[i]$-module de type fini.
   On suppose désormais que M est $\mathbb{Z}$-libre.
2. Montrer que M est libre en tant que $\mathbb{Z}[i]$-module.
3. Montrer que le $\mathbb{Z}$-rang de M est pair, disons égal à $2r$, et qu'il existe une base du $\mathbb{Z}$-module M dans laquelle la matrice de J est
$$\begin{pmatrix} 0 & -I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix}.$$
4. Pour $\pi = a + ib \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$, montrer que $\mathbb{Z}[i]/(\pi)$ est fini, de cardinal $a^2 + b^2$.
5. Soit p un nombre premier impair. Montrer que p est somme de deux carrés si et seulement si $p \equiv 1 \bmod 4$. (on pourra munir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'une structure de $\mathbb{Z}[i]$-module.)

Exercice 13. Soit A un anneau principal.

1. Soit M $= A/(d_1) \times \cdots \times A/(d_n)$ où $d_i \in A \setminus A^\times$, $d_i \neq 0$, et $d_1 | \cdots | d_n$. Montrer qu'il existe un ensemble fini Σ d'irréductibles de A tel que $d_i \sim \prod_{p \in \Sigma} p^{\alpha_p(i)}$ avec :
   — α_p croissante pour tout $p \in \Sigma$;
   — $\alpha_p(1) \neq 0$ pour au moins un p ;
   — $\alpha_p(n) \neq 0$ pour tout p.
2. Donner une expression pour le nombre de facteurs invariants de la composante p-primaire $M(p^\infty)$.
3. Soit $M = C_1 \times \cdots \times C_m$ un module produit de modules cycliques, c'est-à-dire de la forme $C \simeq A/(a)$ avec $a \in A$ non nul et non inversible. Expliquer comment calculer les facteurs invariants de M, et appliquer la méthode au groupe abélien $M = \mathbb{Z}/490\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/28\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/147\mathbb{Z}$.

Exercice 14. (théorème de Brauer) Soit K un corps contenant $\mathbb{Q}$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathrm{GL}_n(K)$ la matrice de permutation associée et u_σ l'endomorphisme de K^n correspondant.

1. À une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe la suite d'entiers $\delta(\sigma)$ formée par la suite décroissante des longueurs des cycles intervenant dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Montrer que pour tous σ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si, et seulement si $\delta(\sigma) = \delta(\tau)$.
2. À une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe la suite $c(\sigma) = (c_d(\sigma))_{d \geqslant 1}$ où $c_d(\sigma)$ désigne le nombre de cycles de longueur d dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints. Montrer que pour tous σ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si, et seulement si $c(\sigma) = c(\tau)$.
3. Donner les classes de conjugaison et calculer les fonctions c et δ de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \in \{4,5\}$.
4. Considérons P_σ et P_τ associées à $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que si σ et τ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$, alors P_σ et P_τ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(K)$.
5. Soit $K = \mathbb{Q}$. On considère la famille $(\Phi_d)_{d \geqslant 1}$ des polynômes cyclotomiques. Montrer que $(\mathbb{Q}^n, u_\sigma) \simeq \bigoplus_{d \geqslant 1} (\mathbb{Q}[X]/\Phi_d)^{f(d)}$ (en tant que $K[X]$-modules), où $f(d) = \sum_{l, d | l} c_l(\sigma)$.
6. Soit K contenant $\mathbb{Q}$. Montrer que si P_σ et P_τ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(K)$ alors, pour tout $d \geqslant 0$, $\sum_{l, d|l} c_l(\sigma) = \sum_{l, d|l} c_l(\tau)$, et en déduire que $c_d(\sigma) = c_d(\tau)$ pour tout $d \geqslant 1$.
7. En déduire le théorème de Brauer : $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si, et seulement si P_σ et P_τ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(K)$.