Feuille 3 – Anneaux locaux ; modules libres, de type fini

Dans cette feuille, A désigne un anneau commutatif.

Exercice 1.

1. À quelle condition sur l'entier naturel n l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il un anneau local ?
2. Tout sous-anneau d'un anneau local est-il nécessairement local ?
3. Tout quotient d'un anneau local est-il nécessairement local ?
4. Montrer que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A et tout entier $n \geqslant 1$, l'anneau $A/\mathfrak{m}^n$ est local.
5. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) l'anneau A est local ;
   (b) $A \setminus A^\times$ est un idéal de A ;
   (c) pour tous éléments $a, b \in A$ vérifiant $a + b = 1$, on a $a \in A^\times$ ou $b \in A^\times$.

Exercice 2. Soit K un corps. On appelle série formelle à coefficients dans K la donnée d'une suite dénombrable d'éléments de K.

1. Montrer que l'ensemble $K[[X]]$ des séries formelles à coefficients dans K est muni d'une structure d'anneau commutatif telle que $K[X]$ s'injecte naturellement dans $K[[X]]$.
2. Montrer que $K[[X]]$ est un anneau intègre, dont les unités sont exactement les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 \neq 0$.
3. Notons $K((X))$ le corps des fractions de $K[[X]]$. Démontrer que les éléments de $K((X))$ sont exactement les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de K pour lesquelles il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $a_n = 0$ si $n < -n_0$.

Exercice 3. Notons $\mathrm{Rad}(A)$ l'intersection des idéaux maximaux de A.

1. Montrer que pour tout élément $x \in \mathrm{Rad}(A)$, on a $1 - x \in A^\times$.
2. Soient I un idéal de A et M un A-module de type fini tel que $IM = M$. Montrer qu'il existe un élément $y \in I$ tel que $(1 + y)M = \{0\}$.
3. En déduire que si A est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, tout A-module M non nul de type fini vérifie $\mathfrak{m}M \neq M$.

Exercice 4. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre pour tout $n \geqslant 2$. Plus généralement, montrer que si tout A-module est libre, alors A est un corps (ou l'anneau nul).

Exercice 5. Montrer qu'un idéal I d'un anneau A est un sous-module libre de A si et seulement si I est principal et engendré par un élément non diviseur de zéro de A.

Exercice 6. Soit $M = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \equiv 0 \bmod 2 \text{ et } x - y \equiv 0 \bmod 4\}$.

1. Montrer que M est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 2 et en donner une base.
2. Montrer que $\mathbb{Z}^2/M$ est fini.

Exercice 7. (Modules simples) Un A-module M est dit *simple* lorsqu'il est non nul et n'admet pas de sous-modules non triviaux.

1. Montrer que si M est un A-module simple, alors tout endomorphisme de M est soit nul, soit un automorphisme.
2. Soit I un idéal de A. Montrer que A/I est simple si et seulement si I est maximal.

3. Montrer qu'un A-module simple est isomorphe à un $A/\mathfrak{m}$, pour un certain idéal maximal $\mathfrak{m}$.
4. Décrire tous les modules simples sur un anneau principal, à isomorphisme près.

Exercice 8. Le groupe abélien $\mathbb{Q}$ est naturellement un $\mathbb{Z}$-module.

1. Montrer que tout sous-module de type fini de $\mathbb{Q}$ est libre de rang 0 ou 1.
2. En déduire que $\mathbb{Q}$ n'est pas de type fini, puis la même chose pour $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
3. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de $\mathbb{Q}$ et $j \in I$. Montrer que la famille $(e_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ est encore génératrice.

Exercice 9.

1. Montrer que tout A-module admet une partie génératrice. En déduire que tout A-module est isomorphe à un quotient d'un A-module libre.
2. Soit M un A-module et N un sous-module de M. Si N et M/N sont libres, montrer que M est libre.
3. Montrer que toute somme directe et que tout produit fini de A-modules libres est libre.
4. Soit $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Montrer que $2A$ et $3A$ ne sont pas libres, mais que $2A \oplus 3A$ l'est.

Exercice 10. Soient M un A-module et $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de M.

1. Montrer que si $(e_i)_{i\in I}$ est une A-base de M, alors on a $M = \bigoplus_{i\in I} Ae_i$.
2. Montrer que la réciproque est fausse en considérant $A = M = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et la famille $(2, 3)$.
3. Montrer que $(e_i)_{i\in I}$ est une A-base de M si et seulement si on a l'égalité $M = \bigoplus_{i\in I} Ae_i$ et les éléments e_i ne sont pas de torsion.

Exercice 11. Soit M un A-module libre. Pour $a \in A$, on note m_a la multiplication par a dans M. Montrer que m_a est injective (respectivement surjective) si, et seulement si a est régulier (respectivement inversible) dans A. Retrouver ainsi le fait que $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre.

Exercice 12. (Bicommutant) Supposons A principal. On note $\mathscr{P}$ un système de représentants de l'ensemble des nombres premiers de A.

1. Soient $a, b \in A$. À quelle condition le quotient aA/bA a-t-il un sens ? Déterminer a' tel que $aA/bA \simeq A/a'A$.
2. Soient $a, b \in A$. Montrer que l'ensemble $I_{a,b} = \{c \in A; b|ac\}$ est un idéal de A qui contient bA. En déterminer un générateur en fonction des décompositions de a et b en irréductibles.
3. Décrire $I_{a,b}$ et de $I_{a,b}/bA$ à l'aide d'isomorphismes simples (ou : déterminer leurs facteurs invariants). Cas particulier : $a = 0$, $b = 0$, $a|b$, $b|a$, a et b premiers entre eux.
4. Soient $a, b \in A$. Déterminer $\mathrm{Hom}_A(A/aA, A/bA)$. Cas particulier : $a = 0$, $b = 0$, $a|b$, $b|a$, a et b premiers entre eux.
5. Soit M un A-module de type fini. Déterminer $\mathrm{End}_A(M)$.
6. Déterminer le centre de $\mathrm{End}_A(M)$. En déduire l'ensemble des endomorphismes de groupe de M qui commutent avec tous les éléments de $\mathrm{End}_A(M)$.
7. Application. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Déterminer la dimension du commutant de u puis l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments qui commutent avec u (on utilise l'exercice 3, question 5 de la feuille 2).