Feuille 2 – Manipulations élémentaires sur les modules

Dans cette feuille, A désigne un anneau commutatif.

Exercice 1.

1. Soient M, N deux A-modules, et $P \subseteq M$, $Q \subseteq N$ des sous-A-modules. Montrer l'isomorphisme $(M \oplus N)/(P \oplus Q) \simeq M/P \oplus N/Q$.
2. Soient M un A-module et $P \subseteq N \subseteq M$ deux sous-A-modules. Montrer l'isomorphisme $(M/P)/(N/P) \simeq M/N$.
3. Soient M un A-module et $P, N \subseteq M$ deux sous-A-modules. Montrer que $(N+P)/N \simeq P/(N \cap P)$.

Exercice 2. Soient $(M,+)$ un groupe abélien, B un anneau, et $\rho : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

1. Montrer qu'être un A-module M revient à l'existence d'un morphisme d'anneaux $A \to \mathrm{End}_{\mathrm{gr}}(M)$.
2. Montrer que B peut être muni d'une structure de A-module *via* ρ. En déduire que A, A/I (si $I \subseteq A$ est un idéal), A^n et $\mathrm{M}_n(A)$ sont des A-modules.
3. Supposons B commutatif. Montrer que tout B-module admet une structure de A-module *via* ρ.
4. Montrer qu'alors, toute application B-linéaire est A-linéaire.

Exercice 3. Soit K un corps commutatif.

1. Soit E un $K[X]$-module. Montrer que E « est » un K-espace vectoriel, et que l'application $m \in E \mapsto X \cdot m \in E$ est une application K-linéaire.
2. Soient E un K-espace vectoriel, et u un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe sur E une structure de $K[X]$-module sur u vérifiant $X \cdot_{K[X]} m = u(m)$ et $a \cdot_{K[X]} m = a \cdot_K m$ pour $a \in K$.
3. En déduire une bijection entre les $K[X]$-modules et les couples formés d'un K-espace vectoriel et d'un endomorphisme de cet espace vectoriel.
4. Déterminer en fonction de u les sous-$K[X]$-modules de E.
5. Soient (E,u) et (F,v) deux $K[X]$-modules. Déterminer $\mathrm{Hom}_{K[X]}(E,F)$ en fonction de u et v. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que (E,u) et (F,v) soient isomorphes.
6. On note π_u le polynôme minimal de u. Montrer que (E,u) est en fait un $K[X]/(\pi_u)$-module. Déterminer les sous-$K[X]/(\pi_u)$-modules de E et $\mathrm{End}_{K[X]/(\pi_u)}(E)$.
7. On suppose que π_u est irréductible. Montrer que tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.
8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^2+u+1=0$. Démontrer que $\dim(E)$ est paire et déterminer la dimension de $C(u) = \{v \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E) \mid uv = vu\}$.

Exercice 4. (Torsion) Un module M est dit sans torsion si $M_{\mathrm{tors}} = \{0\}$, et de torsion si $M_{\mathrm{tors}} = M$.

1. Quels sont les éléments de torsion du A-module A ?

   On suppose pour le reste de l'exercice que A est un anneau intègre.
2. Montrer que M_{tors} est un sous-module de M. Est-ce encore vrai si A n'est plus supposé intègre ?
3. Montrer que M/M_{tors} est un A-module sans torsion.
4. Soit N un sous-module de M. Exprimer N_{tors} en fonction de M_{tors}. En déduire que M_{tors} est un module de torsion.
5. Soient N et P deux sous-modules de M tels que $M = N \oplus P$. Montrer que $M_{\mathrm{tors}} = N_{\mathrm{tors}} \oplus P_{\mathrm{tors}}$. En déduire que A^r est sans torsion.

6. Si $f : M \to N$ est un morphisme de A-modules alors $f(M_{\text{tors}}) \subseteq N_{\text{tors}}$. En déduire que si f réalise un isomorphisme entre M et N, alors f induit un isomorphisme entre M_{tors} et N_{tors}. En déduire qu'un module libre de type fini est sans torsion.
7. Montrer que si $0 \to M \to N \to P$ est exacte, alors $0 \to M_{\text{tors}} \to N_{\text{tors}} \to P_{\text{tors}}$ l'est aussi.
8. Montrer qu'il existe une unique application A-linéaire $\tilde{f}$ rendant commutatif le diagramme suivant (ici π_M et π_N désignent les surjections canoniques),

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi_M"] & N \arrow[d, two heads, "\pi_N"] \\ M/M_{\text{tors}} \arrow[r, dotted, "\tilde{f}"] & N/N_{\text{tors}} \end{tikzcd} .$$

9. Montrer que $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module sans torsion, qui n'est pas de type fini et tel que toute famille à plus de deux éléments est liée. En particulier, $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre.
10. Montrer que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module de torsion qui n'est pas de type fini.

Exercice 5. (familles libres, génératrices : contre-exemples)

1. Peut-on extraire de toute famille génératrice d'un module libre une base ? Peut-on compléter toute famille libre d'un module libre en une base ?
2. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module n'admettant pas de base (ni même de famille libre).
3. Montrer qu'un sous-module d'un module de type fini n'est pas nécessairement de type fini.

Exercice 6. Soient M un A-module et $M^{\vee\vee} = \operatorname{Hom}_A(M^\vee, A)$ son module bidual. On a une application naturelle $\psi_M : M \to M^{\vee\vee}$ définie par $\psi_M(m) : f \mapsto f(m)$ pour $m \in M$. Montrer que si M est un A-module libre de type fini, alors ψ_M est un isomorphisme.

Exercice 7. (Lemme du serpent) Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r, "v'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On construit un morphisme $\delta : \ker(c) \to \operatorname{coker}(a)$ ainsi : si $z \in \ker(c) \subseteq C = \operatorname{im}(v)$, alors on peut écrire $z = v(y)$ avec $y \in B$, et on a $0 = c(v(y)) = v'(b(y))$ ce qui fait que $b(y) \in \ker(v') = \operatorname{im}(u')$; il existe donc un (et un seul) $x' \in A'$ tel que $b(y) = u'(x')$: on pose $\delta(z) = x' \bmod \operatorname{im}(a)$.

Si on avait choisi un y différent, disons $\tilde{y}$ tel que $z = v(\tilde{y})$, alors $y - \tilde{y} \in \ker(v) = \operatorname{im}(u)$ et donc $b(y - \tilde{y}) \in b(\operatorname{im}(u)) = u'(\operatorname{im}(a))$, puis $x' - \tilde{x}' \in \operatorname{im}(a)$. L'application $\delta : z \mapsto \bar{x}'$ de $\ker(c)$ dans $\operatorname{coker}(a)$ est donc bien définie.

Montrer que la suite $0 \to \ker(a) \xrightarrow{u} \ker(b) \xrightarrow{v} \ker(c) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(a) \xrightarrow{\bar{u}'} \operatorname{coker}(b) \xrightarrow{\bar{v}'} \operatorname{coker}(c) \to 0$ est exacte.

Exercice 8. (Lemme des cinq) Supposons que le diagramme suivant est commutatif, que ses lignes horizontales sont exactes, que f_2 et f_4 sont des isomorphismes, et que f_1 est surjectif et f_5 injectif. Montrer que f_3 est un isomorphisme (on peut utiliser le lemme du serpent).

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "u_M"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "v_M"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "w_M"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "x_M"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\ N_1 \arrow[r, "u_N"] & N_2 \arrow[r, "v_N"] & N_3 \arrow[r, "w_N"] & N_4 \arrow[r, "x_N"] & N_5 \end{tikzcd}$$