Feuille 1 – Rappels sur les anneaux, sur les déterminants

Dans cette feuille, A désigne un anneau commutatif. On rappelle que A est principal s'il est intègre, et si tout idéal est principal (c'est-à-dire de la forme aA). Un idéal I de A est maximal si A/I est un corps (ou, de manière équivalente, s'il est maximal au sens de l'inclusion dans l'ensemble des idéaux propres de A), et premier si A/I est intègre.

Exercice 1. Est-ce que l'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneaux (commutatifs) est un idéal ? Et l'image directe ?

Exercice 2. Soit I un idéal de A. Décrire les idéaux de A/I à l'aide de ceux de A.

Exercice 3.

1. Rappeler pourquoi $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont principaux.
2. Est-ce que le quotient d'un anneau principal reste principal ?
3. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

Exercice 4. Montrer qu'un anneau intègre et fini est un corps.

On dit que a est nilpotent s'il existe $n \geqslant 1$ tel que $a^n = 0$.

Exercice 5.

1. Montrer que si $u \in A$ est inversible et $n \in A$ nilpotent, alors $u + n$ est inversible.
2. En particulier, $1 - n$ est inversible. Quel est son inverse ? Déterminer 8^{-1} mod 243.
3. Montrer que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in A[X]$ est inversible si, et seulement si a_0 est inversible et $a_1, \ldots, a_n$ nilpotents.

Exercice 6. (Radical d'un idéal)

1. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A.
2. On considère un idéal I de A. Montrer que l'ensemble $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}; x^n \in I\}$ est un idéal contenant I. Que vaut $\sqrt{(0)}$? Calculer $\sqrt{\sqrt{I}}$.
3. Décrire $\sqrt{(\bar{a})}$ dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ pour $a, b \geqslant 1$ deux entiers. Déterminer $\sqrt{(X)}$ et $\sqrt{(X^3, Y)}$ dans $\mathbb{C}[X, Y]$.
4. Décrire l'image dans A/I de $\sqrt{I}$ par la projection canonique.
5. Montrer que l'intersection des idéaux premiers de A contenant I est $\sqrt{I}$ (indication : montrer que si $x \notin \sqrt{I}$, l'ensemble des idéaux contenant I ne rencontrant pas l'ensemble $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et admet un élément maximal qui est un idéal premier de A).
6. Montrer que $A/\sqrt{(0)}$ n'a pas d'élément nilpotent non nul.

Un diviseur de 0 dans A est un élément $a \in A \setminus \{0\}$ tel qu'il existe $b \in A$ vérifiant $ab = 0$.

Exercice 7. Pour chacun de ces anneaux, déterminer ses diviseurs de 0, ses éléments nilpotents, et ses éléments inversibles :

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X], \quad \mathbb{Z}[X],$$

$$\mathbb{Q}[X], \quad \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X], \quad \mathbb{Q}[X]/(X^2), \quad \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 1), \quad \mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1).$$

Exercice 8. Montrer que si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux alors f induit par restriction un morphisme de groupes de $A^\times$ dans $B^\times$. Est-ce que, si l'on suppose f surjectif, le morphisme de $A^\times$ dans $B^\times$ induit reste surjectif ?

Exercice 9. Soient $m, n \geqslant 1$ deux entiers.

1. Déterminer les morphismes de groupes, d'anneaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Déterminer les morphismes de groupes, d'anneaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10. (Lemme chinois) Soient I, J deux idéaux de A. On rappelle que IJ est l'idéal *engendré* par les éléments ij, où $(i, j) \in I \times J$.

1. On suppose que $I + J = A$. Montrer que $I \cap J = IJ$, puis que la projection $A \to A/I \times A/J$ définit un isomorphisme $A/IJ \to A/I \times A/J$. Quelle est sa réciproque ?
2. Soit $(I_1, \ldots, I_r)$ une famille d'idéaux de A tels que $I_i + I_j = A$ pour $i \neq j$. Montrer que la projection $A \to \prod\limits_{i=1}^{r} A/I_i$ définit un isomorphisme $A/I_1 \cdots I_r \simeq \prod\limits_{i=1}^{r} A/I_i$.

Exercice 11. (Idéaux de $\mathrm{M}_n(A)$) On veut montrer que tout idéal bilatère I de $\mathrm{M}_n(A)$ (c'est-à-dire : on a $I\mathrm{M}_n(A) = \mathrm{M}_n(A)I = I$) est de la forme $\mathrm{M}_n(J)$ où J est un idéal de A.

1. Vérifier que si J est un idéal de A, alors $\mathrm{M}_n(J)$ est un idéal bilatère de $\mathrm{M}_n(A)$.
   Réciproquement, soit I un idéal bilatère de $\mathrm{M}_n(A)$. Notons $J = \{m_{11} \mid ((m_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in I\} \subseteq A$.
2. Montrer que J est un idéal de A.
3. En utilisant les $E_{i,j} = ((\delta_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, montrer que si $M = ((m_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in I$, alors $m_{i,j} \in J$.
4. Montrer que si $a \in J$, alors $aE_{ij} \in I$ pour tous i, j. Conclure.

Exercice 12. (Déterminant sur $\mathrm{M}_n(A)$, rappels) On admet l'existence d'une application $\det$: $\mathrm{M}_n(A) \to A$ qui est A-multilinéaire alternée en les colonnes, et telle que $\det(\mathrm{I}_n) = 1$.

1. Montrer que si $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, et si $C_1, \ldots, C_n$ sont n vecteurs colonnes, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a : $a_i \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) = \det\left(C_1, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{n} a_i C_i, \ldots, C_n\right)$ (règle de Cramer).
2. Montrer que si $C_1, \ldots, C_n$ sont n vecteurs colonnes, et si on pose $D_j = a_{j,1}C_1 + \cdots a_{j,n}C_n$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, alors $\det(D_1, \ldots, D_n) = \left(\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}\right) \cdot \det(C_1, \ldots, C_n)$.
3. Retrouver le fait que si A est un corps, la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ de A^n est liée si, et seulement si $\det(C_1, \ldots, C_n) = 0$. Et si A n'est pas un corps ?
4. Montrer que si $f : A \to A'$ est un morphisme d'anneaux, qu'on étend en $f : \mathrm{M}_n(A) \to \mathrm{M}_n(A')$ en posant $f(M) = ((f(m_{i,j})))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors $f(\det(M)) = \det(f(M))$.
5. Montrer que $\det(M) = \det({}^tM)$ pour toute matrice carrée M.
6. Soit $M = ((m_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On appelle *mineur* de $m_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}(M)$ de la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et j-ième colonne de M. Le scalaire $M_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(M)$ s'appelle le *cofacteur* de $m_{i,j}$. Montrer que $\det(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{k,j}M_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{i,k}M_{i,k}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.
7. Soit $\mathrm{com}(M) = ((M_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que ${}^t\mathrm{com}(M)M = M{}^t\mathrm{com}(M) = \det(M)\cdot\mathrm{I}_n$. En déduire que M est inversible dans $\mathrm{M}_n(A)$ si, et seulement si $\det(M)$ est inversible dans A.