Devoir maison 2 (facultatif)

Exercice 1. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{10})$, et soit $\alpha \in \mathcal{O}_K$, de polynôme minimal $\mu_{\alpha,\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$, on note $\bar{Q}$ sa projection dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$.

1. Montrer que $Q(\alpha) \in 3\mathbb{Z}[\alpha]$ si, et seulement si $\bar{\mu}_{\alpha,\mathbb{Q}}$ divise $\bar{Q}$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$.

   On suppose désormais que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$.
2. Montrer que le groupe de Galois de $K/\mathbb{Q}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
3. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les images de $(1+\sqrt{7})(1+\sqrt{10})$ par les automorphismes de corps de K. Montrer que tous les produits possibles de la forme $\alpha_i \cdot \alpha_j$, pour $j \neq i$, sont dans $3\mathbb{Z}[\alpha]$, mais qu'aucune des puissances α_i^n (où $n \geqslant 0$) ne l'est : on examinera leur trace $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_i^n)$.
4. Montrer que pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, il existe un polynôme $P_i \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P_i(\alpha) = \alpha_i$.
5. Montrer que $\bar{\mu}_{\alpha,\mathbb{Q}}$ divise tous les produits de la forme $\bar{P}_i \cdot \bar{P}_j$ où $i \neq j$, mais aucune des puissances $\bar{P}_i^n$ (où $n \geqslant 0$). En déduire que pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, le polynôme $\bar{\mu}_{\alpha,\mathbb{Q}}$ possède un diviseur irréductible divisant tous les $\bar{P}_j$ (où $j \neq i$) sauf $\bar{P}_i$.
6. En déduire que $\bar{\mu}_{\alpha,\mathbb{Q}}$ admet quatre facteurs irréductibles distincts, puis une contradiction : ceci démontre que $\mathcal{O}_K$ n'est pas de la forme $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif intègre, de corps de fractions K. On s'intéresse au transfert de la propriété « être intégralement clos » à $A[[X]]$ (l'anneau des séries formelles à coefficients dans A ; voir l'exercice 2 de la feuille 3).

1. On dit que A est complètement intégralement clos si, pour tout $a \in K$, l'existence d'un élément $d \in A \setminus \{0\}$ tel que $da^n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ implique nécessairement $a \in A$.
   (a) Montrer que si A est complètement intégralement clos, alors il est intégralement clos.
   (b) Montrer qu'un anneau principal est complètement intégralement clos.
   (c) En déduire que si A est complètement intégralement clos, alors $A[[X]]$ l'est également (en particulier, il est intégralement clos dans ce cas). On pourra raisonner par l'absurde, et se ramener à une série formelle dont le premier coefficient non nul n'est pas dans A.
2. On s'intéresse au corps des fractions de $A[[X]]$.
   (a) Montrer que le corps des fractions de $A[[X]]$ est contenu dans $K((X)) := K[[X]]\left[\frac{1}{X}\right]$.
   (b) Soit p un nombre premier. On pose $A = \mathbb{Z}_{(p)}$ dans cette question (donc $K = \mathbb{Q}$). Pour tout $a \in A \setminus \{0\}$, on définit $v(a)$ comme étant l'entier tel que $a \in p^{v(a)}A$ et $a \notin p^{v(a)+1}A$. La fonction v se prolonge à K^* en posant $v\left(\frac{m}{n}\right) = v(m) - v(n)$. On pose aussi $v(0) = \infty$.
   Soit $\sum_{n=0}^{\infty} z_n X^n \in K[[X]] \cap \mathrm{Frac}\,(A[[X]])$. Montrer qu'il existe $a_0 \in A$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $v(z_n) \geqslant -(n+1)v(a_0)$.
   (c) En déduire que l'inclusion $K[[X]] \subseteq \mathrm{Frac}\,(A[[X]])$ est fausse en général : on n'a donc pas nécessairement l'égalité $K((X)) = \mathrm{Frac}\,(A[[X]])$.
   (d) Montrer que pour tout $a \in A$, il existe une série formelle $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n \in K[[X]]$ telle que $(XU)^2 - a(XU) + X = 0$ et $a^{2n+1}u_n \in A$ pour tout entier $n \geqslant 1$
   (e) On reprend $A = \mathbb{Z}_{(p)}$ dans cette question. Déduire de la question précédente que la réciproque de la 2.(b) est fausse : si une série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} z_n X^n \in K[[X]]$ est telle que $n \mapsto v(z_{n-1})$ soit minorée par une fonction linéaire, alors cette série formelle n'est pas nécessairement dans $\mathrm{Frac}(A[[X]])$.

3. Soit A la sous-algèbre de $\mathbb{Q}(X, Y)$ engendrée sur $\mathbb{Q}$ par les monômes $X^r Y^s$ vérifiant $r \geqslant 0$ et les monômes Y^s vérifiant $s \geqslant 0$. À l'aide de la question 2.(d), montrer que l'anneau $A[[X]]$ n'est pas intégralement clos, bien que A le soit (indication : on peut considérer $a, d \in A$ non nuls et non inversibles, tels que $da^{-n} \in A$ pour tout entier naturel n).