Devoir maison 1

Exercice 1. Soient K un corps, et L une extension finie de K. On note $n = [L : K]$. Un anneau est dit réduit s'il ne contient pas d'éléments nilpotents non triviaux.

On rappelle que L/K est séparable si, pour tout $x \in L$, son polynôme minimal sur K est à racines simples (dans une clôture algébrique de K) ; elle est normale si tout polynôme irréductible à coefficients dans K, et qui admet au moins une racine dans L, est scindé sur L ; elle est galoisienne si elle est normale et séparable. On renvoie au cours d'algèbre de l'an dernier pour les définitions équivalentes.

1. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
   (a) L'extension L/K est séparable.
   (b) Pour toute extension E de K, la K-algèbre $L \otimes_K E$ est réduite.
   (c) La K-algèbre $L \otimes_K L$ est réduite.
2. Montrer que l'extension L/K est galoisienne si et seulement si $L \otimes_K L$ est isomorphe à L^n comme K-algèbre.

Exercice 2. L'ensemble $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ désigne les suites d'entiers relatifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où les a_n sont tous nuls, sauf un nombre fini d'entre eux.

1. On définit une application bilinéaire $(\cdot,\cdot) : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{Z}$ en posant $(f, g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)g(n)$.
   Montrer que $(\cdot,\cdot)$ induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules : $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{Z})$.
2. Montrer que $(\cdot,\cdot)$ induit un morphisme injectif de $\mathbb{Z}$-modules $\Phi : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$.
   On définit désormais :
   $$\Psi : \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}) & \to & \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \\ \psi & \mapsto & \left(\psi\left((\delta_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}\right)\right)_{i\in\mathbb{N}} \end{cases}$$
   où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, et $\delta_{i,j} = 0$ sinon.
3. En considérant les images par Ψ de suites de la forme $(2^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(3^n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que tout élément $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ s'annulant sur $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ est identiquement nul.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(\Psi) \subseteq \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$.
5. En déduire que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules.
6. Conclure : montrer que $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre.

Exercice 3.

1. Donner les invariants de similitude, et un représentant de chaque classe de similitude, des endomorphismes de K^6 dont le polynôme caractéristique est $(X^2+1)(X^2+X+1)^2$, dans les cas où $K = \mathbb{Q}$ et $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Calculer les invariants de similitude de $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$.