Feuille 8 – Extensions normales, extensions galoisiennes

Exercice 1. Montrer qu'une extension de corps de degré 2 est toujours normale.

Exercice 2. Soit L/K une extension de degré p, avec p premier. On a vu (TD7, exercice 3) qu'il existe $\alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$. Supposons que α est séparable ; montrer que s'il existe une autre racine $\alpha' \neq \alpha$ du polynôme minimal de α qui appartient à L, alors l'extension L/K est une extension normale (donc galoisienne), et calculer son groupe de Galois.

Exercice 3. Soient $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré n, et K son corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$. On suppose que le groupe de Galois de $K/\mathbb{Q}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.

1. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Soit $\alpha \in K$ une racine de P. Calculer le groupe des automorphismes de $\mathbb{Q}(\alpha)$.
3. Supposons $n \geqslant 4$. Montrer que $\alpha^n \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4. Soit L/K une extension de degré m, et $P \in K[X]$ un polynôme irréductible (sur K) de degré n. On pose $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$.

1. Montrer que P admet sur L une décomposition en au plus d facteurs irréductibles de degré multiple de n/d.
2. Montrer que si L/K est une extension normale, alors tous les facteurs irréductibles de P sont de même degré. En déduire une relation entre d et le nombre de facteurs irréductibles de P.

Exercice 5. Soit $\zeta_n = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Montrer que $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne, et déterminer son groupe de Galois.

Exercice 6. Déterminer le groupe de Galois de $X^4 - 5$ sur $\mathbb{Q}$, puis sur $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$.

Exercice 7. Montrer que le groupe de Galois d'un polynôme irréductible de degré 3 sur $\mathbb{Q}$, ayant deux racines complexes non réelles, est $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 8. Soit $P \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré n, et $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les racines (comptées avec multiplicité) de P.

1. Montrer que
$$D = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} (\alpha_i - \alpha_j)$$
est un élément de K. On l'appelle le discriminant de P.
On suppose dorénavant que P est séparable et que la caractéristique de K est impaire. Posons $d(P) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)$.
2. Montrer que $\sigma(d(P)) = \varepsilon(\sigma) d(P)$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(P)$, où ε désigne la signature (de la permutation induite par σ sur les racines de P).

Exercice 9. Soient $P = X^3 + X^2 - 2X - 1$ et $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ une extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par une racine α de P.

1. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\alpha^2 - 2$ est racine de P.
3. En déduire que P est scindé dans K, puis que $K/\mathbb{Q}$ est une extension normale. Déterminer le groupe de Galois de $K/\mathbb{Q}$.

Exercice 10. On veut démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos).

1. Montrer qu'il suffit de montrer le résultat pour un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$.
   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. Nous allons montrer par récurrence sur $r = v_2(n)$ que P admet une racine dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer que le résultat est vrai pour $r = 0$ ou $\deg(P) = 2$.
   Supposons $r \geqslant 1$. Soit L le corps de décomposition de P sur $\mathbb{R}$ (on ne peut pas encore affirmer que $L \subseteq \mathbb{C}$). Notons a_i les racines de P dans L. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, posons

$$Q_c = \prod_{1 \leqslant 1 < j \leqslant n} (X - a_i - a_j - c a_i a_j).$$

   (a) Déterminer $v_2(\deg(Q_c))$.
   (b) Montrer que les coefficients de Q_c sont réels.
   (c) Conclure.