Feuille 7 – Extensions séparables

Exercice 1. Soit L/K une extension de corps finie.

1. Supposons que l'ensemble des extensions intermédiaires de L/K est fini. Démontrer que l'extension L/K est alors monogène.
2. Supposons que l'extension L/K est monogène et fixons un élément $\alpha \in L$ vérifiant $L = K(\alpha)$.
   (a) Montrer que si M est une extension intermédiaire de L/K, alors M est le sous-corps de L engendré sur K par les coefficients du polynôme minimal de α sur M.
   (b) En déduire que l'ensemble des extensions intermédiaires de L/K est fini.
3. Donner un exemple d'extension finie contenant un nombre infini d'extensions intermédiaires.
4. Montrer que toute extension L/K finie séparable est monogène. On pourra commencer par montrer que l'application

$$h : \begin{cases} \{\text{extensions intermédiaires}\} & \to & \mathcal{P}(\mathrm{Hom}_K(L, \bar{K})) \\ M & \mapsto & \mathrm{Hom}_M(L, \bar{K}) \end{cases}$$

   est injective. Le résultat démontré est le *théorème de l'élément primitif.*

Exercice 2. Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et L/K une extension de degré 2. Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $L = K(\sqrt{a})$. Et si la caractéristique vaut 2 ?

Exercice 3. Soit L/K une extension de degré p, avec p premier.

1. Montrer que l'extension est monogène.
2. On note $\alpha \in L$ un élément tel que $L = K(\alpha)$. Supposons l'extension non séparable. Déterminer le nombre de racines du polynôme minimal μ_α de α et la forme de μ_α.

Exercice 4. Soient K un corps fini, $P \in K[X]$ un polynôme irréductible sur K et L/K une extension de corps contenant une racine de P. Démontrer que P est scindé sur L.

Exercice 5. Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Démontrer que toute extension finie de K de degré premier à p est séparable.

Exercice 6. Soit L/K une extension de corps séparable. Supposons que le degré sur K des éléments de L soit uniformément borné, *i.e.* qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $[K(x) : K] \leqslant n$ pour tout $x \in L$. Démontrer que l'extension L/K est alors finie, de degré majoré par n.

Exercice 7.

1. Soit p un entier premier. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{p}})/\mathbb{Q}$ puis la liste de toutes ses extensions intermédiaires.
2. Soient p_1, …, p_n des entiers premiers deux à deux distincts (avec $n \geqslant 2$).
   (a) Déterminer le degré de l'extension $K/\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})/\mathbb{Q}$. On pourra d'abord montrer, par récurrence sur un entier k, la propriété suivante : pour tout $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout s-uplet $(i_1, \ldots, i_s)$ tels que $k < i_1 < \cdots < i_s \leqslant n$, on a $\sqrt{p_{i_1} \cdots p_{i_s}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_k})$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\sigma_k \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ tel que $\sigma_k(\sqrt{p_k}) = -\sqrt{p_k}$ et $\sigma_k(\sqrt{p_l}) = \sqrt{p_l}$ pour $l \neq k$. En déduire que pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, le nombre $\varepsilon_1\sqrt{p_1} + \cdots + \varepsilon_n\sqrt{p_n}$ est racine du polynôme minimal de $\alpha = \sqrt{p_1} + \cdots + \sqrt{p_n}$ sur $\mathbb{Q}$.
   (c) En déduire que $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.
3. Soit p un entier premier impair. Posons $a = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$ et $x = a + a^{-1}$.

(a) Démontrer que x est un élément algébrique sur $\mathbb{Q}$, et déterminer son degré.

(b) Calculer explicitement le polynôme minimal de x sur $\mathbb{Q}$ lorsque $p \in \{3,5,7\}$.

Exercice 8. Soit K un corps non parfait de caractéristique $p > 0$. Soit $a \in K$ un élément n'admettant pas de racine p-ième dans K.

1. Montrer que $L = K[X]/(X^p - a)$ est un corps.
2. Démontrer que l'anneau $L \otimes_K L$ n'est pas intègre.
3. Construire un isomorphisme d'anneaux entre $L \otimes_K L$ et $L[T]/(T^p)$.