Feuille 4 – Anneaux, modules localisés

Dans tous les exercices de cette feuille, A désigne un anneau commutatif.

Exercice 1. Décrire ces anneaux localisés par rapport à des idéaux premiers : $\mathbb{Z}_{(p)}$, $(\mathbb{Z}^2)_{\mathbb{Z}\times\{0\}}$, $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})_{(2)}$, $\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})_{I_0}$, où I_0 est l'idéal des fonctions continues s'annulant en 0.

Exercice 2. Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel, et soit p un nombre premier divisant n. Décrire $S^{-1}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, où $S = \{p^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3. Soit S une partie multiplicative de A.

1. Montrer que pour tout morphisme d'anneaux commutatifs $f : A \to B$, l'ensemble $f(S)$ est une partie multiplicative de B.
2. Montrer que pour tout morphisme d'anneaux commutatifs $f : B \to A$, l'ensemble $f^{-1}(S)$ est une partie multiplicative de B.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur S pour que :
   (a) l'anneau $S^{-1}A$ soit non nul ;
   (b) le morphisme canonique $\pi : A \to S^{-1}A$ soit injectif.
4. Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que l'on dispose des égalités suivantes entre idéaux de $S^{-1}A$:
$$S^{-1}(I+J) = S^{-1}I + S^{-1}J, \quad S^{-1}(I\cap J) = (S^{-1}I)\cap(S^{-1}J), \quad S^{-1}(IJ) = (S^{-1}I)(S^{-1}J).$$
5. Supposons que S ne contienne pas 0.
   (a) Montrer que si A est euclidien (respectivement : principal, factoriel), alors $S^{-1}A$ l'est aussi.
   (b) Supposons que A soit de plus un anneau intègre de corps des fractions K. Montrer qu'il existe une application canonique $\varphi : S^{-1}A \to K$, puis que celle-ci est injective.

Exercice 4. Soit a un élément non nul de A.

1. Montrer que $S_a := \{a^n \mid n \geqslant 0\}$ est une partie multiplicative de l'anneau A.
2. Montrer que si a n'est pas nilpotent, alors il existe un isomorphisme d'anneaux de la forme
$$S_a^{-1}A \simeq A[X]/(aX-1).$$
3. Quel résultat obtient-on lorsque A est l'anneau des polynômes à coefficients dans un corps K en une indéterminée a ?
4. À l'aide de ce qui précède, démontrer que l'anneau $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ est un anneau principal.

Exercice 5. Supposons que A soit intègre. Démontrer que l'on a alors
$$A = \bigcap_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}},$$
où $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{m}$ parcourent respectivement parcourt l'ensemble des idéaux premiers et maximaux de A.

Exercice 6. On note $\sqrt{(0)}$ l'ensemble des éléments nilpotents de A, et on l'appelle le nilradical de A. On dit que A est réduit si $\sqrt{(0)} = \{0\}$.

1. Montrer que $\sqrt{(0)}$ est un idéal de A.

2. On veut montrer que $\sqrt{(0)}$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de A.
   (a) Montrer que $\sqrt{(0)}$ est contenu dans chacun des idéaux premiers de A.
   (b) Soit $x \in A$ non nilpotent. On considère l'ensemble $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$. Montrer qu'il existe un idéal maximal parmi les idéaux de A qui ne rencontrent pas S, et que cet idéal est premier.
   (c) En déduire que $\sqrt{(0)}$ est l'intersection des idéaux premiers de A.
3. (a) Soit S une partie multiplicative de A. Montrer que $S^{-1}\sqrt{(0)}$ est le nilradical de $S^{-1}A$.
   (b) Montrer que A est réduit si et seulement si $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A.

Exercice 7. Soient S et T deux parties multiplicatives de A. On suppose que $S \subseteq T$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. On a une bijection naturelle entre $S^{-1}A$ et $T^{-1}A$.
2. Pour tout $t \in T$, il existe $a \in A$ tel que $at \in S$.
3. Tout idéal premier qui rencontre T rencontre aussi S.

Exercice 8. Soit S une partie multiplicative de A. Soient M et N deux A-modules.

1. Montrer que si N est un sous-A-module de M, alors $S^{-1}N$ est un sous-$S^{-1}A$-module de $S^{-1}M$, et l'on dispose d'un isomorphisme de $S^{-1}A$-modules de la forme
$$S^{-1}(M/N) \simeq S^{-1}M/S^{-1}N.$$
2. En déduire que le A-module $S^{-1}A$ est plat.
3. Démontrer l'existence d'un isomorphisme canonique de $S^{-1}A$-modules
$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \simeq S^{-1}(M \otimes_A N).$$

Exercice 9. Soit M un A-module de type fini. Montrer que $S^{-1}M = 0$ si, et seulement s'il existe $s \in S$ tel que $sM = 0$.

Exercice 10. Soit I un idéal de A. Soit M un A-module tel que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A contenant I, on ait $M_{\mathfrak{m}} = \{0\}$. Montrer que $M = IM$.