Feuille 3 – Anneaux locaux, anneaux de valuation discrète

Dans tous les exercices de cette feuille, A désigne un anneau commutatif.

Exercice 1.

1. À quelle condition sur l'entier naturel n l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il un anneau local ?
2. Tout sous-anneau d'un anneau local est-il nécessairement local ?
3. Tout quotient d'un anneau local est-il nécessairement local ?
4. Soit A un anneau commutatif intègre. Montrer que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A et tout entier $n \geqslant 1$, l'anneau $A/\mathfrak{m}^n$ est un anneau local.
5. Soit A un anneau commutatif. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) l'anneau A est local ;
   (b) $A \setminus A^\times$ est un idéal de A ;
   (c) pour tous éléments $a, b \in A$ vérifiant $a + b = 1$, on a $a \in A^\times$ ou $b \in A^\times$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{Z}_p$ le sous-anneau de $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ formé des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de congruence $x_{n+1} \equiv x_n \mod p^{n+1}$. Montrer qu'il s'agit d'un anneau intègre et local. Quel est son corps résiduel ?

Exercice 3. Fixons un nombre complexe x_0, et notons $\mathcal{O}_{x_0}$ l'ensemble des germes de fonctions holomorphes en x_0 : c'est l'espace quotient associé à la relation d'équivalence $\equiv$, définie comme suit sur l'anneau des fonctions $f : U_f \to \mathbb{C}$ holomorphes sur un voisinage U_f de x_0 :

$$f \equiv g \Leftrightarrow \text{il existe un voisinage de } x_0, \text{ contenu dans } U_f \cap U_g, \text{ sur lequel } f \text{ et } g \text{ coïncident.}$$

1. Vérifier que $\mathcal{O}_{x_0}$ est un anneau qui s'injecte naturellement dans $\mathbb{C}[[X]]$.
2. Montrer que $\mathcal{O}_{x_0}$ est un anneau local, et déterminer un générateur de son idéal maximal $\mathfrak{m}_{x_0}$.
3. Déterminer le corps des fractions de $\mathcal{O}_{x_0}$.
4. Montrer que $\mathcal{O}_{x_0}$ est un anneau de valuation discrète, et identifier son corps résiduel.

Exercice 4. Soit K un corps. On appelle série formelle à coefficients dans K la donnée d'une suite dénombrable d'éléments de K.

1. Montrer que l'ensemble $K[[X]]$ des séries formelles à coefficients dans K est muni d'une structure d'anneau commutatif telle que $K[X]$ s'injecte naturellement dans $K[[X]]$.
2. Montrer que $K[[X]]$ est un anneau intègre, dont les unités sont exactement les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^\mathbb{N}$ vérifiant $x_0 \neq 0$.
3. Notons $K((X))$ le corps des fractions de $K[[X]]$.
   (a) Démontrer que les éléments de $K((X))$ sont exactement les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de K pour lesquelles il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $a_n = 0$ si $n < -n_0$.
   (b) Montrer que $K[[X]]$ est un anneau de valuation discrète dont on explicitera une uniformisante ainsi que son corps résiduel.

Exercice 5. Notons $\mathrm{Rad}(A)$ l'intersection des idéaux maximaux de A.

1. Montrer que pour tout élément $x \in \mathrm{Rad}(A)$, on a $1 - x \in A^\times$.
2. Soit I un idéal de A et M un A-module de type fini tel que $IM = M$. Montrer qu'il existe un élément $y \in I$ tel que $(1 + y)M = \{0\}$.

3. En déduire que si A est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, tout A-module M non nul de type fini vérifie $\mathfrak{m}M \neq M$.

Exercice 6. Soit A un anneau local noethérien intègre d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k.

1. Supposons que A contienne un idéal premier non nul non maximal. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a alors $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$.
2. Supposons que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ soit un espace vectoriel de dimension 1 sur k. Démontrer que A est alors un anneau de valuation discrète.

Exercice 7. Soit A un anneau local noethérien, dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est engendré par un élément π non nilpotent.

1. Soit $\mathfrak{n}$ l'idéal formé des éléments $x \in A$ tel que $x\pi^m = 0$ pour un certain entier m. Montrer qu'il existe N entier tel que $x\pi^N = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{n}$.
2. En utilisant la question précédente, montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = \{0\}$.
3. En déduire que A est un anneau de valuation discrète. Et réciproquement ?

Exercice 8. Soit K un corps et soit $|\cdot| : K \to \bar{\mathbb{R}}$ une valeur absolue.

1. Montrer que la fonction caractéristique de $K^\times$ définit une valeur absolue sur K (qu'on appelle la valeur absolue triviale).
2. Montrer que $|\cdot|$ est la valeur absolue triviale si, et seulement si la topologie qu'elle définit sur K est la topologie discrète.

Exercice 9. Une valeur absolue sur K est ultramétrique (ou : non archimédienne) lorsqu'elle vérifie la condition suivante :

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad |x + y| \leqslant \max(|x|, |y|).$$

1. Montrer que si K est muni d'une valeur absolue ultramétrique, alors :
   (a) tout triangle est isocèle ;
   (b) tout point d'une boule en est « le » centre.
2. Montrer que l'ensemble des valeurs absolues ultramétriques sur K est stable par équivalence.
3. Construire une bijection entre l'ensemble des valeurs absolues ultramétriques sur K et celui des valuations réelles sur K.

Exercice 10.

1. Montrer qu'un corps n'est jamais un anneau de valuation.
2. Soient K un corps et v une valuation (réelle) sur K. Montrer que :
   (a) toute racine de l'unité dans K est de valuation nulle ;
   (b) pour tous éléments $x, y \in K$ vérifiant $v(x) \neq v(y)$, on a $v(x + y) = \min(v(x), v(y))$;
   (c) pour tout élément $x \in K^\times$, on a $v(x^{-1}) = -v(x)$.
3. Établir la liste des valuations réelles pouvant exister sur un corps fini K.
4. Soit K un corps muni d'une valuation v. Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}_K := \{x \in K \mid v(x) \geqslant 0\}$ est un sous-anneau maximal de K, et que c'est un anneau intègre de corps des fractions égal à K.

Exercice 11. Soit A un anneau de valuation de corps des fractions K.

1. Montrer que les unités de A sont exactement les éléments de K de valuation nulle.
2. Montrer que A est un anneau local d'idéal maximal $\{x \in K \mid v(x) > 0\}$, où $v : K \to \mathbb{R}$ est une valuation dont A est l'anneau de valuation.