Feuille 2 – Modules plats : précisions

Cette feuille est un complément, pour deux exercices dont la correction en TD a souffert de plusieurs imprécisions, sur le fait de raisonner « à isomorphisme près » ; on peut résoudre les exercices abordés en se ramenant aux sous-A-modules, mais cela nécessite un peu de soin.

Mentionnons quelques résultats qui font sens au milieu de nos interrogations :

Lemme 1 *Si $\phi : M_1 \to M_2$ est un isomorphisme entre A-modules, alors $\phi \otimes \mathrm{id}_N : M_1 \otimes_A N \to M_2 \otimes_A N$ est un isomorphisme entre A-modules.*

La démonstration tient en peu de choses : l'application $M_1 \times N \to M_2 \otimes_A N$ définie par $(m_1, n) \mapsto \phi(m_1) \otimes n$ est manifestement A-linéaire, donc induit une application A-linéaire $\phi \otimes \mathrm{id}_N : M_1 \otimes_A N \to M_2 \otimes_A N$ telle que $(\phi \otimes \mathrm{id}_N)(m_1 \otimes n) = \phi(m_1) \otimes n$. On définit de même $\phi^{-1} \otimes \mathrm{id}_N : M_2 \otimes_A N \to M_1 \otimes_A N$, et la composition de ces deux applications fixe les tenseurs simples, donc égale l'identité partout *. C'est un cas extrêmement particulier du résultat suivant, démontré entre autres dans *Algèbre* de Bourbaki (troisième édition, II.59, proposition 6) : si l'on a deux suites exactes

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0,$$

$$N' \xrightarrow{s} N \xrightarrow{t} N'' \longrightarrow 0,$$

alors le morphisme $v \otimes t : M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N''$ est surjectif, et son noyau égale $\mathrm{Im}(u \otimes \mathrm{id}_N) + \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \otimes s)$ (le cas où $M' = N' = 0$, $M = M''$ et $N = N''$ donne le lemme).

Lemme 2 *Si $\nu : M' \to M$ est injectif et si $\nu(M')$ est facteur direct de M, le morphisme $\mathrm{id}_N \otimes \nu$ est injectif, et son image est facteur direct de $N \otimes_A M$.*

Cela résulte de la distributivité du produit tensoriel (on a un isomorphisme $\left(\bigoplus_i M_i\right) \otimes_A \left(\bigoplus_j N_j\right) \simeq \bigoplus_{i,j} \left(M_i \otimes_A N_j\right)$ donné par $(x_i)_i \otimes (y_j)_j \mapsto (x_i \otimes y_j)_{i,j}$). Nous n'utiliserons pas ce lemme, qui est là par curiosité.

Exercice 1.

1. Supposons que pour tout sous-A-module de type fini M_0 de M, l'application A-linéaire canonique $\mathrm{id}_N \otimes \iota : N \otimes_A M_0 \to N \otimes_A M$ est injective. Si M_1 est un sous-A-module quelconque de M, on procède comme on l'a vu en TD, donc le résultat est démontré si $M_1 \to M$ est le morphisme d'inclusion. À présent, si $\nu : M_1 \to M$ est un morphisme injectif quelconque, alors $\nu(M_1)$ est un sous-A-module de M. Comme $\nu(M_1) \to M$ est un morphisme d'inclusion, ce qui précède montre que $N \otimes_A \nu(M_1) \to N \otimes_A M$ est une application injective ; il reste à montrer que l'application $\mathrm{id}_N \otimes \nu : N \otimes_A M_1 \to N \otimes_A \nu(M_1)$ est également injective, et pour cela on utilise le lemme 1.
2. Vu en TD.

*. Comparer ce lemme et les contre-exemples connus à la platitude d'un module ; penser à $M_1 = M_2 = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et à la multiplication par 2 : d'une part, le lemme implique que $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (on peut aussi montrer ce dernier isomorphisme directement, par exemple avec l'isomorphisme $M \otimes_A A/I \simeq M/IM$), et d'autre part, la multiplication par 2 est injective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ bien que l'application induite $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne le soit pas (elle est d'image nulle ; on remarque en particulier que

$$\{0\} = (m_2 \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}})(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq m_2(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Exercice 2.

1. Vu en TD. Apportons toutefois quelques précisions :
   (a) Si $M \otimes_A I \to M$ est injective, alors $M \otimes_A I \simeq IM$.
   (b) Il est possible d'avoir $M \otimes_A I \to M$ non injective si $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $A = \mathbb{Z}$: l'application $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas injective, puisque le noyau contient $1 \otimes 2 \neq 0$ (attention, on ne peut pas faire « sortir le 2 » pour l'injecter dans l'autre coordonnée du tenseur, quand on est dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z}$!).
   (c) Soit R un ensemble de générateurs de M ; peu importe le cardinal de R, il est licite de définir l'application A-linéaire $\bigoplus_{i \in R} A \to M$ qui envoie chaque élément de la base canonique de $\bigoplus_{i \in R} A$ (« card(R) copies de A » ; c'est un module libre) sur les éléments de R. Cette application est clairement surjective.
   Alors, une fois qu'on a montré que M est N-plat pour tout module libre N, on montre que M est N-plat pour un module quelconque N ainsi : il existe une surjection $\pi : L \to N$ (avec L libre), et soit, pour toute injection $\nu : N' \to N$, l'image réciproque $L' = \pi^{-1}(N')$. On a alors le diagramme suivant, où les lignes horizontales sont exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker(\pi) \arrow[r] \arrow[d, equal] & L' \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker(\pi) \arrow[r] & L \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   Après tensorisation, on a :

$$\begin{tikzcd} \ker(\pi) \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, equal] & L' \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d] & N' \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \ker(\pi) \otimes_A M \arrow[r] & L \otimes_A M \arrow[r] & N \otimes_A M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   Comme la flèche verticale du milieu est injective, on a clairement l'injectivité de $M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$.
2. Raisonner comme dans le premier exercice où l'on se ramène au type fini.
3. Dans ce cas, tout idéal est de la forme $I = aA$, et la multiplication par a (qu'on appelle m_a) est un isomorphisme de A dans I, donc $m_a \otimes \mathrm{id}_M$ également, d'après le lemme 1. Notons u_a la multiplication par a dans le module M. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M = A \otimes_A M \arrow[r, "m_a \otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "u_a"'] & I \otimes_A M \arrow[dl] \\ IM & \end{tikzcd}$$

   et comme $m_a \otimes \mathrm{id}_M$ est un isomorphisme, l'application $I \otimes_A M \to IM$ est bijective si, et seulement si u_a l'est également, si et seulement si u_a est injective (la surjectivité est évidente), si et seulement si $ax = 0$ (pour $x \in M$) implique $x = 0$.