Feuille 2 – Modules plats

Dans tous les exercices de cette feuille, A désigne un anneau commutatif.

Exercice 1. Soit M un A-module. On dit qu'un A-module N est M-plat lorsque l'assertion suivante est vérifiée : pour toute application A-linéaire injective $\nu : M_1 \to M$, le morphisme de A-modules $\mathrm{id}_N \otimes \nu : N \otimes_A M_1 \to N \otimes_A M$ est encore injectif.

1. Soit N un A-module. Démontrer que le A-module N est M-plat si et seulement s'il satisfait à la condition suivante : pour tout sous-A-module de type fini M_0 de M, l'application A-linéaire canonique $\mathrm{id}_N \otimes \iota : N \otimes_A M_0 \to N \otimes_A M$ est injective.
2. Supposons que N soit un A-module M-plat. Démontrer que pour tout sous-A-module M_0 de M, le A-module N est M_0-plat.

Exercice 2. Soit M un A-module.

1. Démontrer que M est plat sur A si, et seulement si l'application A-linéaire canonique $M \otimes_A I \to M$ est injective pour tout idéal I de A.
2. Démontrer que M est plat sur A si, et seulement si l'application A-linéaire canonique $M \otimes_A I \to M$ est injective pour tout idéal de type fini I de A.
3. En déduire que si A est un anneau principal, alors un A-module M est plat si, et seulement s'il est sans torsion sur A.

Exercice 3.

1. Soit M un A-module plat.
   (a) Montrer que pour tout idéal I de A, le (A/I)-module M/IM est plat.
   (b) Montrer que pour toute A-algèbre commutative B, le B-module $M \otimes_A B$ est plat.
   (c) Soient N_1, N_2 deux sous-A-modules d'un A-module N quelconque.
      i. Démontrer que l'on dispose d'une suite exacte courte de A-modules de la forme
      $$0 \longrightarrow N_1 \cap N_2 \longrightarrow N \longrightarrow (N/N_1) \otimes (N/N_2) \longrightarrow 0.$$
      ii. Démontrer qu'en tant que sous-A-modules de $N \otimes_A M$, on peut naturellement identifier les A-modules $(N_1 \cap N_2) \otimes_A M$ et $(N_1 \otimes_A M) \cap (N_2 \otimes_A M)$.
2. Supposons que A soit de plus intègre. Montrer que $\mathrm{Frac}(A)$ est un A-module plat.
3. Supposons que l'on dispose d'une suite exacte courte de A-modules de la forme
   $$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0,$$
   avec M_2 plat sur A. Démontrer que M est plat sur A si et seulement si M_1 l'est.
4. Notons M l'ensemble des paires $(a, -a)$ avec a parcourant A.
   (a) Vérifier que M est un sous-A-module de A^2. Notons N_1, N_2 les sous-A-modules de A^2/M obtenus par projection des facteurs directs de A^2.
   (b) Démontrer que N_1 et N_2 sont des A-modules plats.
   (c) Le A-module $N_1 \cap N_2$ est-il plat sur A ?

Exercice 4.

1. Soit M un A-module plat. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes :

- pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, on a $\mathfrak{m}M \neq M$;
- pour tout A-module non nul N, le A-module $M \otimes_A N$ est non nul ;
- si $f : N_1 \to N_2$ est une application A-linéaire entre A-modules, alors pour tout M, l'application $f \otimes \mathrm{id} : N_1 \otimes M \to N_2 \otimes M$ est un isomorphisme seulement si f en est un.

Si M vérifie ces propriétés, on dit qu'il est *fidèlement plat* sur A.

2. Donner un exemple explicite de module plat mais non fidèlement plat.
3. Démontrer que tout A-module libre non nul est fidèlement plat.

Exercice 5. Supposons que B soit une A-algèbre commutative fidèlement plate sur A. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes pour tout A-module M :
- le A-module M est de type fini ;
- le B-module $M \otimes_A B$ est de type fini.

Exercice 6. Soit M un A-module fidèlement plat.
1. Montrer que pour tout A-module N, l'application A-linéaire canonique $N \to N \otimes_A M$ est injective.
2. Démontrer que la fidèle platitude est une propriété stable par changement de base.
3. Démontrer que M est un A-module fidèle (c'est-à-dire : la multiplication par tout élément non nul de A est injective).
4. Tout A-module plat et fidèle est-il fidèlement plat ?
5. Démontrer que pour tout A-module plat N, le A-module $M \oplus N$ est fidèlement plat.
6. Supposons que l'on dispose d'une suite exacte courte de A-modules
$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0,$$
avec M_1 et M_3 plats sur A. Démontrer que si M_1 ou M_3 est fidèlement plat sur A, alors M_2 est fidèlement plat sur A.

Exercice 7.
1. Soient B, C et D trois A-algèbres. Montrer que les isomorphismes canoniques de modules $B \otimes_A C \simeq C \otimes_A B$ et $(B \otimes_A C) \otimes_A D \simeq B \otimes_A (C \otimes_A D)$ sont, en fait, des isomorphismes de A-algèbres.
2. Démontrer la même chose que dans la question précédente, mais avec les isomorphismes $A[X] \otimes A[Y] \simeq A[X, Y]$ et, si B est une A-algèbre, $B \otimes_A A/I \simeq B/IB$.