Feuille 1 – Catégorie et foncteurs, produit tensoriel : indications

Exercice 1. Vu en TD.

Exercice 2. Vu en TD.

Exercice 3. Vu en TD.

Exercice 4. Vu en cours.

Exercice 5. Vu en TD.

Exercice 6. Vu en TD.

Exercice 7. Vu en TD.

Exercice 8. Vu en TD. Notons qu'on peut démontrer que $A/I \otimes_A A/J = \{0\}$ directement si $I+J=A$: sous telle hypothèse, comme $1 \in A = I+J$, il existe un couple (i,j) dans $I \times J$ tel que $1 = i+j$. Alors, pour tout $x \otimes y \in A/I \otimes_A A/J$,

$$x \otimes y = (i+j)(x \otimes y) = (ix \otimes y) + (x \otimes jy) = 0 \otimes y + x \otimes 0 = 0.$$

Comme les tenseurs simples sont tous nuls, tous les tenseurs de $A/I \otimes_A A/J$ sont nuls.

Exercice 9. Vu en TD.

Exercice 10.

1. C'est vérifié parce que V et W sont, en particulier, des K-modules libres.
2. (a) On part de la suite exacte courte

   $$0 \longrightarrow M_{\text{tors}} \longrightarrow M \longrightarrow M/M_{\text{tors}} \longrightarrow 0,$$

   qui donne, après y avoir appliqué le foncteur $K \otimes_A \cdot$ qui est exact à droite :

   $$K \otimes_A M_{\text{tors}} \longrightarrow K \otimes_A M \longrightarrow K \otimes_A M/M_{\text{tors}} \longrightarrow 0.$$

   Si l'on montre que $K \otimes_A M_{\text{tors}}$ est nul, on aura bien le résultat désiré. On le vérifie sur les tenseurs simples ; si m est un élément de torsion de M, annulé par un élément non nul $a \in A$, et x un élément de K, alors :

   $$x \otimes m = \frac{ax}{a} \otimes m = a\left(\frac{x}{a} \otimes m\right) = \left(\frac{x}{a} \otimes am\right) = \frac{x}{a} \otimes 0 = 0,$$

   donc $K \otimes_A M_{\text{tors}} = 0$.

   (b) L'image de $1 \otimes m$ dans $K \otimes_A M/M_{\text{tors}}$ est nulle, donc dans $K \otimes_A M$ également d'après l'isomorphisme.
3. Les produits tensoriels $M \otimes_A K$ et $N \otimes_A K$ sont des espaces vectoriels sur K, donc les éléments de $(M \otimes_A K) \otimes_K (N \otimes_A K)$ de la forme $(m \otimes 1) \otimes (n \otimes 1)$, où $m \otimes 1$ et $n \otimes 1$ sont non nuls, sont des tenseurs non nuls. Or, d'après la question précédente, $m \otimes 1$ est nul précisément si m est de torsion, de même pour $n \otimes 1$. On conclut en utilisant l'application $M \otimes_A N \to (M \otimes_A K) \otimes_K (N \otimes_A K)$ naturelle : si m et n ne sont pas de torsion, l'image de $m \otimes n$ par ce morphisme est non nulle, donc ne l'est pas non plus dans $M \otimes_A N$.

Exercice 11. Vu en TD.

Exercice 12. L'application linéaire canonique $\mathrm{C}^0(X,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} Y \to \mathrm{C}^0(X,Y)$ provient de l'application qui se définit sur les tenseurs simples par :

$$\Phi : \begin{cases} \mathrm{C}^0(X,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} Y & \to & \mathrm{C}^0(X, \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} Y) \\ f \otimes \vec{y} & \mapsto & (x \mapsto f(x) \otimes \vec{y}) \end{cases},$$

où l'on identifie $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} Y$ et Y *via* l'isomorphisme canonique $z \otimes \vec{y} \mapsto z\vec{y}$. Si f est une application réelle continue sur X, alors son image est un compact de $\mathbb{R}$, donc pour tout $\vec{y} \in Y$ l'application $\Phi(f \otimes \vec{y})$ est manifestement d'image compacte également (c'est l'image du compact $f(X)$ par l'application continue $z \mapsto z\vec{y}$), et une somme de compacts est clairement compacte (c'est l'image d'un produit de compacts par une application continue de la forme $(x_i)_i \mapsto \sum_i x_i$). On en déduit que le sous-espace vectoriel de Y engendré par un élément dans l'image de l'application canonique Φ est localement compact ; par le théorème de Riesz, il est de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $g : X \to Y$ une application continue telle que le sous-espace vectoriel de Y engendré par son image soit de dimension finie, disons égale à n. Soient $y_1, \ldots, y_n$ des éléments de Y tels que pour tout $x \in X$, on puisse écrire $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) y_i$ de manière unique, pour $\alpha_i(x)$ des réels. Les α_i définissent des applications continues $X \to \mathbb{R}$, parce qu'elles s'obtiennent en composant $g : X \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(g(X)) \hookrightarrow Y$ et des applications de projection $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(g(X)) \to \mathbb{R}$ (qui sont continues).

Exercice 13. Cela peut être une conséquence directe de l'exercice 6 ; il implique les isomorphismes suivants, tous canoniques :

$$(R \otimes_A M) \otimes_R (R \otimes_A N) \simeq ((R \otimes_A M) \otimes_R R) \otimes_A N \simeq (R \otimes_A M) \otimes_A N \simeq R \otimes_A (M \otimes_A N).$$

On vérifie que la suite d'isomorphismes envoie bel et bien $r((1 \otimes m) \otimes (1 \otimes n))$ sur $r \otimes (m \otimes n)$.

Exercice 14. Sera vu en cours. L'idée, pour passer du cas général au cas intègre, est d'obtenir A^n comme produit tensoriel, sur un anneau intègre R, de R^n par A, de sorte que l'application $f : A^n \to A^n$ provienne en fait d'une application R-linéaire $R^n \to R^n$ qui, d'après la seconde question, vérifie le théorème de Cayley-Hamilton. Un bon choix d'algèbre de polynômes, avec suffisamment d'indéterminées, fournit un tel R.

Exercice 15.

1. Le A-module $K \otimes_A V$ est isomorphe à V par l'application naturelle $\lambda \otimes v \mapsto \lambda v$. La surjectivité est évidente ; pour l'injectivité, on remarque d'abord que tout tenseur est simple, puisque tout tenseur simple peut être écrit sous la forme $1 \otimes v$ (on le démontre avec plus de généralité dans la question suivante), et on peut donc en dire autant de tout tenseur (qui s'écrit comme somme de tenseurs simples). L'injectivité est alors triviale, puisque λv s'annule précisément pour $\lambda = 0$ ou $v = 0$, si seulement si $\lambda \otimes v = 0$.
2. (a) Vérifions-le sur les tenseurs simples ; on doit montrer que pour tout $\lambda \in K$ et tout $(v, w) \in V \times W$, on a l'égalité $(\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$. Pour cela, écrivons $\lambda = \frac{a}{b}$ avec a et b des éléments de A (et b non nul). Alors,

$$(\lambda v) \otimes w = \left(\frac{a}{b} v\right) \otimes w = a \left(\frac{1}{b} v\right) \otimes \left(\frac{b}{b} w\right) = v \otimes \left(\frac{a}{b} w\right) = v \otimes (\lambda w),$$

d'où le résultat désiré.

(b) Comme toute application A-(bi)linéaire entre deux K-espaces vectoriels, pour K le corps de fractions de A, est automatiquement K-(bi)linéaire (écrire que $b \cdot \varphi\left(\frac{a}{b} x, y\right) = a \cdot \varphi(x, y)$

pour φ une application A-bilinéaire et $a, b \in A$, b non nul), on a une application K-linéaire naturelle $f : V \otimes_K W \to V \otimes_A W$ grâce à la propriété universelle du produit tensoriel, donnée par $v \otimes w \mapsto v \otimes w$. Inversement, toute application K-bilinéaire est clairement A-bilinéaire, donc on a une application A-linéaire tout aussi naturelle $g : V \otimes_A W \to V \otimes_K W$ donnée par $v \otimes w \mapsto v \otimes w$. Vérifier que f et g sont des applications K-linéaires réciproques l'une de l'autre est une affaire de routine.

(c) Non : comparer $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ et $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, par exemple.