Feuille 1 – Catégorie et foncteurs, produit tensoriel

Exercice 1. Soit `AnnInt` la catégorie ayant pour objets les anneaux (commutatifs) intègres et pour morphismes les morphismes d'anneaux injectifs. Montrer qu'on peut définir un foncteur covariant $F : \texttt{AnnInt} \to \texttt{Corps}$ dont l'action sur les objets est $A \mapsto \mathrm{Frac}(A)$.

Exercice 2. Soit K un corps commutatif. On appelle ensemble algébrique affine un sous-ensemble de K^n, pour $n \geqslant 1$, défini comme le lieu d'annulation de polynômes en n indéterminées. Si V est un ensemble algébrique affine, on note $\Gamma(V)$ l'ensemble des applications polynomiales sur V.

1. Montrer que prendre pour objets les ensembles algébriques affines, et pour morphismes les applications $\varphi : V \subseteq K^n \to W \subseteq K^m$ que l'on peut écrire $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ où les composantes φ_i sont dans $\Gamma(V)$, définit une catégorie.
2. Si $V \subseteq K^n$ est un ensemble algébrique affine, donner des exemples de morphismes de V dans K, puis de V dans K^p pour $p \leqslant n$.
3. Si $V = \{(x, y) \in K^2 \mid y - x^2 = 0\}$, donner un exemple d'isomorphisme $V \to K$.
4. Si V, W sont deux ensembles algébriques affines et $\varphi : V \to W$ un morphisme, on pose, pour $f \in \Gamma(W)$, $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Montrer qu'on définit ainsi un foncteur contravariant, de la catégorie des ensembles algébriques affines dans la catégorie des K-algèbres.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas de foncteur `Groupes` dans `Groupes` qui envoie chaque groupe sur son centre.

Exercice 4. Soient A un anneau commutatif et A-`mod` la catégorie des A-modules. Soit X un A-module fixé. On définit le foncteur covariant $F : M \mapsto \mathrm{Hom}_A(X, M)$. Montrer que si $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ est une suite exacte, alors $0 \to F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3)$ également. Traiter la question analogue en remplaçant F par le foncteur contravariant $G : M \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, X)$.

Exercice 5. Soit A un anneau commutatif. Montrer que si M est un A-module libre de rang $n \geqslant 2$ et de base $(e_1, \dots, e_n)$, alors l'élément $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 \in M \otimes_A M$ n'est pas un tenseur simple.

Exercice 6. Soient A, B deux anneaux commutatifs, M un A-module et P un B-module. Supposons que N soit un (A, B)-bimodule, c'est-à-dire muni à la fois d'une structure de A-module à gauche et d'une structure de B-module à droite qui vérifient $a \cdot (x \cdot b) = (a \cdot x) \cdot b$ pour tous éléments $(a, b, x) \in A \times B \times N$. Démontrer que l'on dispose d'un isomorphisme canonique de (A, B)-bimodules

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \simeq M \otimes_A (N \otimes_B P).$$

Exercice 7. Soit A un anneau commutatif, et soient M, N deux A-modules. Montrer que $\sum_i m_i \otimes n_i \in M \otimes_A N$ est nul si, et seulement si pour tout A-module P et toute application bilinéaire $f : M \times N \to P$, on a $\sum_i f(m_i, n_i) = 0$.

Exercice 8. Soit A un anneau commutatif. Soient I et J deux idéaux de A. Montrer qu'il existe un isomorphisme canonique de A-modules $(A/I) \otimes_A (A/J) \simeq A/(I + J)$. En déduire que si I et J sont des idéaux premiers entre eux, on a $(A/I) \otimes_A (A/J) = \{0\}$.

Exercice 9. Soit A un anneau commutatif. Soient M_1, N_1, M_2, N_2 des A-modules et soient $u_1 : M_1 \to N_1$ et $u_2 : M_2 \to N_2$ deux applications A-linéaires. On rappelle qu'il existe une unique application A-linéaire $u_1 \otimes u_2 : M_1 \otimes_A M_2 \to N_1 \otimes_A N_2$ telle que pour tout $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$:

$$(u_1 \otimes u_2)(m_1 \otimes m_2) = u_1(m_1) \otimes u_2(m_2).$$

1. Montrer que pour toutes applications A-linéaires $w_1 : N_1 \to P_1$ et $w_2 : N_2 \to P_2$, on a
$$(w_1 \circ u_1) \otimes (w_2 \circ u_2) = (w_1 \otimes w_2) \circ (u_1 \otimes u_2).$$
2. Démontrer que si u_1 et u_2 sont surjectives, alors $u_1 \otimes u_2$ est elle aussi surjective.
3. Dispose-t-on d'une propriété analogue pour l'injectivité ?

Exercice 10. Soit A un anneau intègre de corps des fractions K.
1. Soient V et W deux K-espaces vectoriels. Montrer que pour tous éléments non nuls $v \in V$ et $w \in W$, on a $v \otimes w \neq 0$.
2. Soit M un A-module. On appelle M_{tors} l'ensemble des éléments de A-torsion de M.
   (a) Montrer que l'on dispose d'un isomorphisme de A-modules de la forme
   $$K \otimes_A M \simeq K \otimes_A (M/M_{\text{tors}}).$$
   (b) En déduire que M_{tors} est le noyau de l'application A-linéaire naturelle $M \to K \otimes_A M$ envoyant $m \in M$ sur $1 \otimes m$.
3. Soient M et N deux A-modules. Montrer que pour tous éléments $m \in M$ et $n \in N$ qui ne sont pas de A-torsion, on a $m \otimes n \neq 0$.

Exercice 11. Soient A un anneau commutatif intègre et $n \geqslant 1$ un entier naturel. Décrire les produits tensoriels suivants :
$$\mathbb{Z}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \quad A[X_1, \ldots, X_n] \otimes_A A[Y].$$

Exercice 12. Soient X un espace topologique compact et Y un espace vectoriel réel normé. Montrer que l'application linéaire canonique $\mathrm{C}^0(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} Y \to \mathrm{C}^0(X, Y)$ est une injection, dont l'image est le sous-espace vectoriel réel des applications continues $f : X \to Y$ telles que $\mathrm{Im}(f)$ soit contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de Y.

Exercice 13. Soit $A \to R$ un morphisme d'anneaux commutatifs. Montrer que pour tous A-modules M et N, il existe un unique isomorphisme de R-modules $R \otimes_A (M \otimes_A N) \simeq (R \otimes_A M) \otimes_R (R \otimes_A N)$ envoyant $r \otimes (m \otimes n)$ sur $r((1 \otimes m) \otimes (1 \otimes n))$.

Exercice 14.
1. Soit A un anneau commutatif. On rappelle que si $f : A^n \to A^n$ est une application A-linéaire, on note
$$\chi_f(X) = \det(X \cdot \mathrm{Id}_{A^n} - f) \in A[X]$$
le polynôme caractéristique de f. Le théorème de Cayley-Hamilton assure que $\chi_f(f) = 0$ si A est un corps.
2. Montrer que le théorème de Cayley-Hamilton est également vrai si A est un anneau intègre.
3. En déduire que le théorème de Cayley-Hamilton est vrai si A est un anneau commutatif arbitraire.

Exercice 15. Soit A un anneau intègre de corps des fractions K.
1. Montrer que pour tout K-espace vectoriel V, le A-module $K \otimes_A V$ est isomorphe à V.
2. Soient V et W deux espaces vectoriels sur K.
   (a) Montrer que les structures de K-espace vectoriel sur $V \otimes_A W$ respectivement définies par la multiplication sur V et par la multiplication sur W sont les mêmes.
   (b) En déduire que le K-espace vectoriel $V \otimes_A W$ est naturellement isomorphe à $V \otimes_K W$.
   (c) Ces assertions restent-elles valables si K est un corps arbitraire contenant A ?