Colle du 9 novembre 2011 (MPSI3)

Exercice Soit $a > 0$. Sans utiliser l'application exponentielle, montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone qui vérifie $f(x+y) = f(x)f(y)$ et $f(1) = a$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$. Montrer qu'elle est continue, et en déduire que $f(x) = \exp(x \ln(a))$.

Exercice Montrer que $x \mapsto x \cdot \exp(x)$ est une bijection de $[-1, +\infty[$ dans $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$, et calculer la dérivée de sa réciproque en 0.

Exercice Soit $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$. Montrer que toutes ses dérivées k-ièmes en 0 et 1 sont entières. Soit s un entier, et soit $F(x) = s^{2n}f(x) - s^{2n-1}f'(x) + s^{2n-2}f''(x) - \cdots + f^{(2n)}(x)$. Montrer que $F'(x) = -sF(x) + s^{2n+1}f(x)$.

On suppose que $e^s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n!}$ (dont on ne se posera pas la question de la convergence) est un rationnel, écrit sous la forme $\frac{a}{b}$, et on considère n tel que $n! > as^{2n+1}$. Montrer que $b\int_0^1 s^{2n+1}e^{sx}f(x)\mathrm{d}x$ est un entier (c'est égal à $b[e^{sx}F(x)]_0^1 = aF(1) - bF(0)$), et en déduire une contradiction (on montrera que $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$).

Exercice Même méthode avec $\pi^2 = \frac{a}{b}$, $F(x) = b^n\left(\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4}f^{(4)}(x) - \cdots\right)$ (on s'intéresse cette fois à F'', puis à $\pi\int_0^1 a^n f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x (= \left[\frac{1}{\pi}F'(x)\sin(\pi x) - F(x)\cos(\pi x)\right]_0^1 = F(0) + F(1))$.

Exercice Montrer que pour tout entier impair supérieur ou égal à 3, le nombre $\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est irrationnel.

Exercice Étudier les variations de $x \mapsto x^x$.

Exercice Calculer $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$, $x \in \mathbb{R}$.