Colle du 19 octobre 2011 (MPSI3)

Exercice Redémontrer que l'ensemble des périodes d'une fonction forme un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Est-ce que cet ensemble peut être $\mathbb{Q}$? Reprendre la question avec f continue. Même question avec $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ à la place de $\mathbb{Q}$.

Exercice Montrer que $(u_n)_{n\geq 0} = (\exp(2i\pi\theta))_{n\geq 0}$ converge si, et seulement si $\theta \in \mathbb{Z}$.

Exercice Soit $a > 0$. Sans utiliser l'application exponentielle, montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone qui vérifie $f(x + y) = f(x)f(y)$ et $f(1) = a$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$.

Exercice On définit, pour F fermé, $L(F, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de F dans R. Montrer que pour x_0 et y_0 fixés, il existe (f_-, f_+) dans $L(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ tel que $f_-(x_0) = f_+(x_0) = y_0$, et tel que pour tout $f \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $f(x_0) = y_0$, on a $f_- \leq f \leq f_+$. Puis : soit $f_0 \in L(F, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe f_-, f_+ dans $L(F, \mathbb{R})$ qui prolongent f_0 tels que pour tout $f \in L(R, R)$ qui prolonge f_0, on a $f_- \leq f \leq f_+$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$ est une suite convergente.