Colle du 22 mai 2012 (MPSI3)

Merci de bien insister sur le sens « concret » de chaque notion topologique (un ouvert est un ensemble où les éléments restent dedans même un peu « perturbés », *etc.*).

Exercice – équivalence des normes – Soit $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b des nombres rationnels ; c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension 2. On pose, pour tout $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $N(a + b\sqrt{2})_1 = \max(|a|, |b|)$ (ici, $|a|$ désigne la valeur absolue classique de a, idem pour $|b|$) et $N(a + b\sqrt{2})_2 = |a + b\sqrt{2}|$. Vérifier qu'on a ainsi défini des normes sur l'espace vectoriel $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Soit $x = \sqrt{2} - 1$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $x^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont des rationnels non nuls de signes contraires. En déduire que $(\sqrt{2} + 1)^n = |a_n| + |b_n|\sqrt{2}$, puis que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Il a pourtant été vu dans le cours qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes : que se passe-t-il ?

Exercice – notion de continuité – Soit $f : (E, ||\cdot||_E) \to (F, ||\cdot||_F)$ une application qui vérifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y})$ d'éléments de E, l'inégalité $||\vec{x} - \vec{y}||_E < \eta$ entraine $||f(\vec{x}) - f(\vec{y})||_F < \varepsilon$. Montrer que si $(\vec{x}_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergeant vers un élément $\vec{x} \in E$, alors $(f(\vec{x}_n))_{n\geq 0}$ est une suite convergeant vers $f(\vec{x}) \in F$. Démontrer la réciproque.

Exercice – notion de séparation – Soit E un espace vectoriel réel muni d'une norme N. Montrer que pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y})$ d'éléments de E distincts, il existe une boule ouverte contenant $\vec{x}$ et une boule ouverte contenant $\vec{y}$ telles que leur intersection soit vide.

Exercice – exemples basiques dans $\mathbb{R}$ – Dans les cas suivants, dire si ces sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sont fermés (en prenant pour norme la valeur absolue classique) : $]a, b[$, $[a, b]$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $[a, b[$, $]-\infty, a[\cup[b, c]$, $[a, b]\cup]c, d[$ (a, b, c et d sont à chaque fois des réels, et les intervalles sont choisis de sorte à être disjoints dans chaque exemple). Donner l'exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.

Exercice – exemple initiateur dans $\mathbb{R}$ – Montrer que $\mathbb{Q}$ est ni ouvert, ni fermé dans $\mathbb{R}$ (en prenant pour norme la valeur absolue classique, même si ça ne change rien). Quel est le plus grand ouvert contenu dans $\mathbb{Q}$? Et le plus petit fermé contenant $\mathbb{Q}$?

Exercice – exemple poussé dans $\mathbb{R}$ – Soit G un sous-groupe fermé de $(\mathbb{R}, +)$, différent de $\{0\}$ et $(\mathbb{R}, +)$. Montrer qu'il contient un élément strictement positif, et montrer que si on note g la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$, alors g appartient à G. Montrer que $g > 0$. Vérifier que $G = g\mathbb{Z}$.

Exercice – quelques normes sur des espaces de polynômes – Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. À quelle(s) condition(s) nécessaires et suffisantes sur I, l'application définie par $N(P) = \sup_{x \in I} |P(x)|$ est-elle une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$? Et sur $\mathbb{R}[X]$? Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $N(P) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(x)$ (cette somme est, en vérité, finie pour tout polynôme réel P) définit une norme sur les deux espaces vectoriels cités. Montrer qu'il en est de même pour $N'(P) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(k)$ et $N''(P) = \sqrt{\int_0^1 P(t)^2 \mathrm{d}t}$ (bien vérifier l'inégalité triangulaire). Trouver des constantes qui rendent ces différentes normes équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$. Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}[X]$?

Pour chacune de ces normes, étudier le plus petit fermé contenant l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = 0\}$, ainsi que le plus grand ouvert qui est contenu dedans.

Soit P un polynôme réel fixé. Trouver une norme N sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n \geq 0}$ converge vers P pour cette norme.