Colle du 8 mai 2012 (MPSI1)

Polynômes, généralités

Exercice Soit P un polynôme non constant n'ayant que des racines réelles. Montrer que si a est une racine multiple de P', alors a est aussi racine de P. Et si a n'est pas une racine multiple ?

Exercice Montrer que si P est un polynôme réel scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est également scindé.

Exercice Soit Φ_n le polynôme unitaire dont les racines simples sont les générateurs du groupe $\{\zeta \in \mathbb{C}; \zeta^n = 1\}$. Calculer Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4. Quel est le degré de Φ_n ? Montrer que $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$, et en déduire que les Φ_n sont dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que si p est un nombre premier, alors $\Phi_p = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$. Calculer Φ_{p^n} pour $n \geq 1$.

Montrer que si $n > 1$ est impair, alors $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X)$, et si n est pair, alors $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(X)$. Montrer que Φ_n est un polynôme réciproque, c'est-à-dire $\Phi_n(X) = X^{\deg(\Phi_n)}\Phi_n\left(\frac{1}{X}\right)$ (les coefficients se lisent de la même manière dans les deux sens).

Exercice Écrire $\frac{\sin(nt)}{\sin(t)^n}$ comme polynôme de l'indéterminée $\mathrm{cotan}(t)^2$, déterminer les racines de ce polynôme. En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Décomposer $\frac{P'}{P}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire comme combinaison linéaire de fractions rationnelles de la forme $\frac{1}{x-a}$), et en déduire un résultat géométrique sur les racines de P'.

Supposons à présent que P est un polynôme réel. Montrer que $P'(x)^2 \geq P(x)P''(x)$ pour tout x réel.

Exercice Déterminer l'ensemble des polynômes réels P vérifiant l'égalité $P(X^2 + X + 1) = P(X)P(X+1)$.

Exercice Montrer que les seuls polynômes complexes réalisant une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$ sont les polynômes à coefficients rationnels de degré 1. (On peut se ramener à des coefficients entiers et examiner les antécédents de $\frac{1}{p}$ avec p premier).

Exercice Soit $P = X^n - b_1X^{n-1} - \cdots - b_n$, où les b_i sont des réels positifs non tous nuls. Montrer que P a une unique racine positive α, et que α est la plus grande racine de P en valeur absolue. Montrer que α est une racine simple. Montrer que si le pgcd des indices des b_i égale 1, alors α est la plus grande racine de P en valeur absolue *strictement*. Fournir un contre-exemple si cette condition n'est pas remplie.

Exercice Soit P un polynôme complexe de degré 3 dont les trois racines sont distinctes. Notons A, B et C les points d'affixe les racines de P. Montrer que les racines de P' sont les affixes des points focaux de l'ellipse telle que les milieux des côtés du triangle ABC sont sur l'ellipse, et qu'en plus les côtés du triangle ABC sont tangentes à l'ellipse en ces points.

Exercice Soit x un nombre réel, et soit $N(x)$ le nombre de changement de signes dans la suite $P(x), P'(x), \dots, P^{(n)}(x)$, où P est un polynôme réel de degré n. Montrer que le nombre de racines (comptées avec multiplicité) entre a et b, où $P(a), P(b) \neq 0$ et $a < b$, est inférieur à $N(a) - N(b)$. Plus précisément, le nombre de racines ne diffère de $N(a) - N(b)$ que d'un nombre entier pair. En déduire que le nombre de racines positives de $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ est inférieur au nombre de changements de signes dans la suite $a_n, \dots, a_0$.

Arithmétique et polynômes

Exercice Montrer que si P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors les zéros de P dans $\mathbb{C}$ sont tous simples.

Exercice Soit α une racine d'un polynôme P irréductible sur $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une constante strictement positive c, ne dépendant que de α, telle que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$. En déduire que le nombre $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k!}}$ (existence ?) est annulé par aucun polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Exercice Montrer que $P^n + Q^n = R^n$ n'a pas de solutions non triviales pour $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux et $n \geq 3$.

Exercice Soit a un nombre rationnel annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers. Montrer que a est un nombre entier.

On veut à présent montrer que si $a \in \mathbb{Q}(i) = \{x + iy; x, y \in \mathbb{Q}\}$ est annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers, alors $a \in \mathbb{Z}[i] = \{x + iy; x, y \in \mathbb{Z}\}$ est un entier de Gauss. Si $a \in \mathbb{Q}$, alors il n'y a rien à prouver, et on suppose donc $a \notin \mathbb{Q}$.

Montrer que les automorphismes de corps de $\mathbb{Q}(i)$ sont l'identité et la conjugaison, puis que $\mathbb{Q}(i)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension 2. En étudiant l'application « multiplication par a » définie de $\mathbb{Q}(i)$ dans $\mathbb{Q}(i)$ (pourquoi l'application est bien à valeurs dans $\mathbb{Q}(i)$?), montrer que a est annulé par un polynôme unitaire de degré 2 à coefficients entiers. En déduire, en examinant les coefficients de ce polynôme, que $a \in \mathbb{Z}[i]$.

Exercice Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers, et supposons l'existence d'un nombre premier p tel que p divise tous les coefficients a_i sauf a_n, et tel que a_0 ne soit pas divisible par p^2. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Z}$ (*i.e.* ne s'écrit pas comme produit de deux polynômes à coefficients entiers). En déduire l'irréductibilité de $X^n - 2$ pour tout entier $n \geq 2$, puis de $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ pour tout nombre premier p. Montrer que les « exponentielles tronquées » $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$, en admettant le postulat de Bertrand : il existe toujours un nombre premier entre un entier non nul et son double.

Exercice Soient A, B et C trois polynômes premiers entre eux deux à deux, tels que $A+B+C=0$. Alors, le degré de chacun de ces polynômes est inférieur ou égal à $n_0(ABC)-1$, où $n_0(P)$ désigne le nombre de racines distinctes d'un polynôme P. En déduire que l'équation $P^n+Q^n=R^n$ n'a pas de solution non triviale (une solution est triviale si un des polynômes est constant) pour $n\geq 3$.

Polynômes et théorie des groupes/corps

Exercice Si $K\subseteq L$, on dit que $x\in L$ est algébrique sur K s'il est annulé par un polynôme de $K[X]$, et qu'il est transcendant sinon. On note $K[x]$ le plus petit anneau contenant à la fois K et x, puis $K(x)$ le plus petit corps contenant à la fois K et x (au sens de l'inclusion). Montrer que x est algébrique sur K si, et seulement si $K[x]=K(x)$, si, et seulement si $\dim_K K[x]<+\infty$. En déduire que l'ensemble des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un corps. Trouver, par exemple, un polynôme qui annule $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Montrer que $X\in K(X)$ est transcendant sur K.

Bonus : Montrer l'existence de nombres réels transcendants.

Exercice Soit $K\subseteq L$, et $a\in L$. Montrer que l'ensemble des polynômes qui annulent x est un idéal engendré soit par le polynôme nul, soit par un polynôme irréductible. On note π_a ce polynôme quand il existe, et soit $K[a]$ le plus petit anneau contenant a et K. Montrer qu'il est égal à l'image par $P\mapsto P(a)$ de $K[X]$. On suppose toujours que π_a existe. Montrer que $K[a]$ est en fait un corps, et que $K[a]$ est un K-espace vectoriel de dimension $\deg(\pi_a)$. Dans le cas contraire, montrer que $K[a]\simeq K[X]$.

Déterminer π_a pour $a\in\{\sqrt{2},\sqrt[n]{2},\sqrt{3},\sqrt{2}+\sqrt{3},\frac{\sqrt{5}+1}{2},\frac{1}{4},\exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right),\exp\left(\frac{i\pi}{2}\right),\exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right)\}$.

Exercice Soit $P=X^2-a$ avec a un rationnel. Montrer que si σ est un automorphisme du corps $\mathbb{Q}(a)=\{x+\sqrt{a}y;x,y\in\mathbb{Q}\}$, alors $\sigma(a)$ est une racine de P. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(a))$ s'injecte dans $\mathfrak{S}_2$, et en déduire $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(a))$ selon les valeurs de a.

Plus généralement, soit P un polynôme à coefficients rationnels, et α une racine (éventuellement complexe) de P. On note $\mathbb{Q}(\alpha)$ le plus petit corps contenant $\mathbb{Q}$ et α. Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha))$ s'injecte dans $\mathfrak{S}_{\deg(P)}$. On suppose de plus que P est irréductible. Montrer qu'en fait, on a $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha))\leq\deg(P)=\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(a))$. Déterminer ce groupe d'automorphismes si $P=X^3-1$, puis si $P=X^3-2$, $P=X^4-2$ et $P=(X^2-2)^2$.

Exercice Soit K un corps fini commutatif. Montrer qu'il existe des polynômes de $K[X]$ sans racine sur K.

Exercice Soit K un corps fini commutatif à q éléments, avec $q\geq 2$. Montrer que l'application $\varphi:\begin{cases} K[X] & \to & K^K \\ P & \mapsto & \tilde{P}\end{cases}$ n'est pas injective. Elle est clairement linéaire ; quel est son noyau ?

Exercice Soit K un corps commutatif, et $P\in K[X]$ un polynôme irréductible. Montrer qu'il n'a pas de racine. Que dire de la réciproque ? Donner une condition sur le degré de P pour que la réciproque soit valide.

On définit une relation d'équivalence sur $K[X]$ comme suit : $Q \sim R \Leftrightarrow P \mid (Q-R)$. Vérifier que c'est bien une relation d'équivalence sur $K[X]$. Montrer que si P est de degré n, alors il existe une bijection entre les classes d'équivalence de $\sim$ et les polynômes de degré $n-1$. Montrer que la classe du polynôme nul est constituée des multiples de P.

Soient $\mathfrak{cl}_\sim(Q)$ et $\mathfrak{cl}_\sim(R)$ deux classes. On pose $\mathfrak{cl}_\sim(Q)+\mathfrak{cl}_\sim(R) = \mathfrak{cl}_\sim(Q+R)$, et $\mathfrak{cl}_\sim(P)\cdot\mathfrak{cl}_\sim(Q) = \mathfrak{cl}_\sim(P\cdot Q)$. Vérifier que ces opérations sont bien définies (c'est-à-dire ne dépendent pas des représentants P et Q de chaque classe), et montrer que $(K[X]/\sim, +, \cdot)$ est un anneau. En utilisant le fait que P est irréductible, montrer qu'il s'agit en fait d'un corps.

On note $L = K[X]/\sim$, c'est un corps d'après ce qu'on a établi précédemment. Montrer qu'il existe un morphisme de corps (donc nécessairement injectif) $i : K \to L$. Ainsi, quitte à remplacer K par $i(K)$ qui lui est isomorphe, on peut supposer $K \subseteq L$. On pose $a = \mathfrak{cl}_\sim(X)$. Montrer que $P(a) = 0$. On a donc construit une racine de P dans un surcorps de K. C'est la façon la plus « naturelle » de définir $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$, en posant $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/\sim$, où $P = X^2+1$, et on note alors i la classe de X.

Montrer que L est un espace vectoriel sur K de dimension $\deg(P)$.

Difficile : Prouver ce résultat qui généralise la relation entre irréductibilité et racines : soit K un corps et P un polynôme de $K[X]$. Alors, P est irréductible sur K si, et seulement s'il n'a pas de racine dans tout surcorps L de K de dimension au plus $\deg(P)/2$ sur K (quand $n \in \{2,3\}$, on retrouve ce qui a été dit).

Difficile : Montrer qu'il existe un corps fini de cardinal p^n pour tout nombre premier p et entier naturel non nul n. Et réciproquement ?

Polynômes et algèbre linéaire

Exercice Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Si $f \in \mathrm{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est un polynôme réel, on note $P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k \in \mathrm{L}(E)$, et $\mathbb{R}[f]$ l'ensemble des endomorphismes de cette forme. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{L}(E)$, il existe un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$. On note π_f le polynôme minimal (au sens du degré) unitaire qui annule f. Montrer que si P est un polynôme non nul annulant f, alors π_f divise P. Trouver π_f quand f est l'identité, une homothétie, un endomorphisme nilpotent, un projecteur, une symétrie.

Montrer que si f est inversible, alors f^{-1} est un polynôme en f.

Supposons que $f \in \mathrm{L}(E)$ admet un sous-espace stable noté F ; on note $f_{|F} \in \mathrm{L}(F)$ la restriction à ce sous-espace stable. Montrer que $\pi_{f_{|F}}$ divise π_f. En déduire ce que vaut π_f dans le cas d'un endomorphisme dont la matrice dans une certaine base est diagonale. En particulier, s'il existe un vecteur non nul $\vec{x}$ et un scalaire λ tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ (un tel λ est appelé une valeur propre de f), alors λ est une racine de π_f.

À présent, on suppose que E est de dimension finie égale à 2. Montrer que π_f divise $X^2 - \mathrm{tr}(f)X + \det(f)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f ait une matrice diagonale dans une certaine base. Généraliser à toute dimension finie.

Difficile : montrer que π_f divise $\det(f - Xid_E)$. Ceci prouve que les racines de π_f sont *exactement* les valeurs propres de f.

Difficile : montrer que pour tout endomorphisme f, il existe une droite ou un plan stable.

Exercice Montrer que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), \dots, P(n)) \end{cases}$ est un isomorphisme. Quelle est son application réciproque ?

Exercice Montrer qu'il existe une unique application polynomiale P de degré n vérifiant $P(0) = 0$ et $P(t+1) - P(t) = Ct^{n-1}$ (C est une constante fixée). Ou encore : il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\geq 0}$ telle que $B_0 = 1$, $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_n = 0$ pour $n > 0$.

Exercice Soit E un corps commutatif qui est un espace vectoriel réel de dimension finie. Montrer que E égale $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice Déterminer la matrice de $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{cases}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, et déterminer son inverse. En déduire, si on a une relation du type $a_d = \sum_{q=0}^{d} \binom{d}{q} b_q$ pour tout d entre 0 et n, une relation qui exprime b_d en fonction de a_d pour tout d entre 0 et n. En déduire le nombre de permutations sans point fixe dans $\mathfrak{S}_n$, et le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$, si $n \geq k$ (montrer d'abord que n^k égale la somme, pour $j = 1$ à n, du nombre de surjections de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ fois $\binom{n}{q}$).

Exercice Soit P un polynôme réel de degré n qui prend des valeurs entières en les entiers entre 0 et n. Montrer qu'en fait, P prend des valeurs entières en tous les entiers.

Exercice Soit E un espace vectoriel réel, et $f \in \mathrm{L}(E)$ un endomorphisme. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$, on pose $P(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k f^k \in \mathrm{L}(E)$.

Soient P_1 et P_2 deux polynômes réels premiers entre eux. Montrer que $\ker(P_1 P_2(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \ker(P_2(f))$. En déduire les solutions réelles de l'équation différentielle $y''' - y'' - 2y' + 2y = 0$.

Polynômes orthogonaux

Exercice Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(T_n)_{n\geq 0}$ tels que $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Trouver une relation de récurrence entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2} pour tout n, et calculer T_0, T_1, T_2.

Montrer qu'ils sont orthogonaux pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ défini par $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$. En déduire que $T_n^{\perp} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Montrer que tout polynôme P réel de degré $n \geq 1$ et de coefficient dominant 1 vérifie $\max_{-1\leq x\leq 1} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ (on passe par $P(\cos(\theta))$).

Montrer que si P vérifie $|P(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $|x| \leq 1$, alors $P = \frac{T_n}{2^{n-1}}$.

Difficile : montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}; |P(x)| \leq 2\}$ est recouvert par des intervalles dont la somme des longueurs est au plus égale à

4. En déduire que si P est un polynôme complexe, alors la projection orthogonale de $\{x \in \mathbb{C}; |P(x)| \leq 2\}$ sur l'axe des réels est recouvert par des intervalles dont la somme des longueurs n'excède pas 4.

Exercice Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire de la forme $(P|Q) = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)\mathrm{d}t$ où $a < b$ et w est une fonction continue strictement positive. On a de plus $\deg(P_n) = n$. Montrer que les P_n sont scindés à racines simples, avec leurs racines dans l'intervalle $[a, b]$.

Exercice Montrer que $(P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, et que les polynômes d'interpolation de Lagrange en 0, 1, *etc.*, n sont orthonormaux pour ce produit scalaire.