Colle du 11 avril 2012 (MPSI1)

Exercice Soit f une application non nulle de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifie $f(AB) = f(A) \cdot f(B)$ pour toutes matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(A) \neq 0$ si, et seulement si A est inversible.

Exercice Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite qui vérifie une relation de récurrence d'ordre d (on peut prendre $d = 2$ ou 3, peu importe). On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n-d} \\ u_{n-d+1} \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne à d entrées. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$, ne dépendant pas de n, telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \geq 0$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par la relation de récurrence $u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} = 0$. Déterminer A dans ce cas, puis A^n pour tout n. En déduire une expression de u_n pour tout n.

Exercice Soit $M = \begin{pmatrix} 6 & -124 & -15 \\ 78 & 12 & 153 \\ -16 & 60 & -18 \end{pmatrix}$. Montrer que $M^3 = 0$. Déterminer les solutions du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 6x - 124y - 15z \\ y' & = & 78x + 12y + 153z \\ z' & = & -16x + 60y - 18z \end{array} \right.$$

Exercice Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Calculer U^2. Montrer que U est semblable à une matrice diagonale.

Exercice Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 16 & 7 \\ -2 & 10 & 10 \\ 1 & -5 & -5 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 = 0$. En déduire les résolutions du système d'équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -5x + 16y + 7z; \\ y' & = & -2x + 10y + 10z; \\ z' & = & x - 5y - 5z. \end{array} \right.$$

Calculer $I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A$. Que remarque-t-on ?

Exercice Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $B^4 = I_3$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant, pour tout $n \geq 0$, la relation de récurrence $u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout

$n \geq 0$, on a $X_{n+1} = {}^tBX_n$. En déduire l'expression de $(u_n)_{n\geq 0}$ pour tout $n \geq 0$, en fonction de u_0, u_1 et u_2.

Exercice On veut résoudre l'équation différentielle $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$. On pose $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $C \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = CX$ (le sens de X' est évident, je crois). Montrer, à présent, qu'il existe une matrice D diagonale, avec 2, 1 et -1 sur la diagonale, et P inversible telles que $C = PDP^{-1}$. En déduire une expression de $P^{-1}X$, puis de X, puis de y.

Exercice