Colle du 14 mars 2012 (MPSI1)

Exercice Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 16 & 7 \\ -2 & 10 & 10 \\ 1 & -5 & -5 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 = 0$. En déduire les résolutions du système d'équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -5x + 16y + 7z; \\ y' & = & -2x + 10y + 10z; \\ z' & = & x - 5y - 5z. \end{array} \right.$$

Calculer $I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A$. Que remarque-t-on ?

Exercice Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $B^4 = I_3$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant, pour tout $n \geq 0$, la relation de récurrence $u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $X_{n+1} = BX_n$. En déduire l'expression de $(u_n)_{n\geq 0}$ pour tout $n \geq 0$, en fonction de u_0, u_1 et u_2.

Exercice On veut résoudre l'équation différentielle $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$. On pose $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $C \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = CX$ (le sens de X' est évident, je crois). Montrer, à présent, qu'il existe une matrice D diagonale, avec 2, 1 et -1 sur la diagonale, et P inversible telles que $C = PDP^{-1}$. En déduire une expression de $P^{-1}X$, puis de X, puis de y.

Exercice Soit f une application non nulle de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifie $f(AB) = f(A) \cdot f(B)$ pour toutes matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(A) \neq 0$ si, et seulement si A est inversible.

Exercice Déterminer la matrice de $f \ : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & Rn[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array} \right.$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, et déterminer son inverse. En déduire, si on a une relation du type $a_d = \sum_{q=0}^{d} \binom{d}{q} b_q$ pour tout d entre 0 et n, une relation qui exprime b_d en fonction de a_d pour tout d entre 0 et n. En déduire le nombre de permutations sans point fixe dans $\mathfrak{S}_n$, et le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$, si $n \geq k$. En déduire le nombre de permutations sans point fixe dans $\mathfrak{S}_n$, et le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$ si $n \geq k$ (montrer d'abord que n^k égale la somme, pour $j = 1$ à n, du nombre de surjections de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ fois $\binom{n}{q}$).

Exercice Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Calculer U^2. Quel est le rang de U ? Son noyau ? Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à U. Trouver une base $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ de E telle que $f(\vec{e_1}) = n\vec{e_1}$ et $f(\vec{e_i}) = \vec{0}$ sinon.

Exercice Soit $G \subseteq M_n(K)$ un groupe pour le produit. Donner un exemple de tel groupe. Montrer que toutes les matrices ont même noyau et même image.

Exercice Montrer qu'une fonction uniformément continue est dominée par une fonction linéaire.