Colle du 14 septembre 2011

Exercice Soit E un ensemble. Montrer que E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas en bijection.

Exercice (Pour les anciens spé maths) Montrer que $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Que dire de $\mathbb{N}^k$, pour $k \geq 2$?

Exercice Montrer que $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{Z}$. Est-ce que $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{Q}$? Et avec $\mathbb{R}$?

Exercice Soit f une bijection entre $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, m]\!]$. Montrer que $m = n$.

Exercice Dénombre le nombre de bijections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Exercice Soit $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une bijection f entre A et $[\![1, k]\!]$ qui préserve l'ordre, c'est-à-dire : si $a_i < a_j$, alors $f(a_i) < f(a_j)$.

Exercice Soit f une bijection entre deux ensembles E et F. On suppose que E est ordonné, et pour f_1, f_2 dans F on pose $f_1 \leq_F f_2$ si, et seulement si $f(f_1) \leq_E f(f_2)$. Est-ce que $\leq_F$ est une relation d'ordre ?

Exercice Montrer que si $(G, *)$ est un groupe, et E un ensemble en bijection avec G (*via* une application notée f), alors on peut définir une loi de groupe sur E en posant $x *_E y = f(f^{-1}(x) * f^{-1}(y))$, où x et y sont dans E.

Exercice Si a et b sont deux réels, on note $\oplus$ et $\otimes$ les lois suivantes : $a \oplus b = \max(a, b)$ et $a \otimes b = a + b$. Est-ce que ces lois définissent une structure de groupe sur $\mathbb{R}$? On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Reprendre cet exercice en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{T}$.

Exercice (En lien avec l'exercice précédent) On pose $\ln(0) = -\infty$; ceci définit une application $\log_t : \mathbb{R}_+ \to (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) = \mathbb{T}$. Pour a et b deux éléments de $\mathbb{T}$, on pose $a \oplus_t b = \log_t(t^a + t^b)$ et $a \otimes_t b = a + b$. Est-ce que les lois ainsi définies sont des lois de groupe sur $\mathbb{T}$? (Question hors programme de colle : montrer que, quand t tend vers l'infini, $a \oplus_t b$ tend vers $a \oplus b$, où a et b sont fixés.)

Exercice Soit E un ensemble, et A un sous-ensemble de E. On note χ_A la fonction caractéristique de A, qui vaut 1 sur A et 0 sinon. Soient A et B deux sous-ensembles de E. Écrire $\chi_{A \cup B}$, $\chi_{A \cap B}$, $\chi_{A \Delta B}$, $\chi_{E \setminus A}$ et $\chi_{A \times B}$ (on considère ici $A \times B$ comme sous-ensembles de $E \times E$) en fonction de χ_A et χ_B quand c'est possible. Montrer que $\chi_A \leq \chi_B$ si, et seulement si $A \subseteq B$. Est-ce que toute fonction $f : E \to \{0, 1\}$ est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble de E ? Unicité ?

Exercice Montrer que $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas l'axiome de borne supérieure.

Soit E un ensemble. On appelle *filtre* sur E un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ non vide, ne contenant pas l'ensemble vide, tel que l'intersection de deux de ses éléments soit dans encore dans $\mathcal{F}$, et que tout ensemble contenant un élément de $\mathcal{F}$ soit aussi dans $\mathcal{F}$.

Exercice (Filtres, généralités)

1. À quoi sert l'hypothèse $\emptyset \notin \mathcal{F}$?
2. À quelle condition sur E l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un filtre, alors E appartient à $\mathcal{F}$.
4. On pose $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire est fini. Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ est un filtre sur $\mathbb{N}$.

Exercice (Filtres principaux) Soit A une partie non vide de E, on note $\mathcal{F}_A$ l'ensemble des parties de E qui contiennent A.

1. Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un filtre sur E (c'est le filtre principal engendré par A).
2. Montrer que $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_B$ si, et seulement si $A = B$.
3. Soit $\mathcal{F}$ un filtre. On suppose qu'il existe des éléments de $\mathcal{F}$ qui sont des ensemble finis. Justifier l'existence d'un élément de $\mathcal{F}$ de cardinal minimal. Soit n_0 ce cardinal, et A un ensemble de tel cardinal ; montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$.
4. En déduire que pour tout ensemble E fini, tout filtre est principal. Que peut-on dire de l'application φ définie sur $\mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$, à valeurs dans $\mathcal{F}(E)$ (ensemble des filtres) et telle que $\varphi(A) = \mathcal{F}_A$ pour tout $A \subseteq E$? Combien a-t-on de filtres sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3\}$?
5. Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est pas un filtre principal.

Exercice (Filtres et relation d'ordre) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux filtres sur E, on note $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ si, et seulement si $\mathcal{F}$ est inclus dans $\mathcal{G}$. Vérifier que c'est une relation d'ordre. On dit que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre s'il est un élément maximal de $(\mathcal{F}(E), \leq)$.

1. Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles de E, alors $A \subseteq B$ si, et seulement si $\mathcal{F}_B \leq \mathcal{F}_A$.
2. L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ admet-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Expliciter l'élément, le cas échéant.
3. Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un ultrafiltre si, et seulement si A est un singleton. Quels sont les ultrafiltres d'un ensemble fini ?
4. Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si, et seulement pour tout A sous-ensemble de E, soit A, soit son complémentaire est dans $\mathcal{F}$.
5. Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si, et seulement pour tous A, B sous-ensembles de E tels que $A \cup B$ soit dans $\mathcal{E}$, on a soit A, soit B dans $\mathcal{F}$.
6. Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est pas un ultrafiltre, et qu'il est inclus dans aucun ultrafiltre trivial.