Colle du 21 septembre 2011

Exercice Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'équation $x^2 + y^2 = r$, où $r > 0$. Montrer que $\mathcal{C}$ a soit aucun point à coordonnées rationnelles, soit une infinité (et on peut les donner explicitement).

Exercice Démontrer le théorème de Ceva : Soit ABC un triangle, soient D, E et F trois points distincts des sommets et appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB). Les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes ou parallèles si, et seulement si $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$.

Soit E un ensemble. On appelle *filtre* sur E un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ non vide, ne contenant pas l'ensemble vide, tel que l'intersection de deux de ses éléments soit dans encore dans $\mathcal{F}$, et que tout ensemble contenant un élément de $\mathcal{F}$ soit aussi dans $\mathcal{F}$.

Exercice (Filtres, généralités)

1. À quoi sert l'hypothèse $\emptyset \notin \mathcal{F}$?
2. À quelle condition sur E l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un filtre, alors E appartient à $\mathcal{F}$.
4. On pose $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire est fini. Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ est un filtre sur $\mathbb{N}$.

Exercice (Filtres principaux) Soit A une partie non vide de E, on note $\mathcal{F}_A$ l'ensemble des parties de E qui contiennent A.

1. Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un filtre sur E (c'est le filtre principal engendré par A).
2. Montrer que $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_B$ si, et seulement si $A = B$.
3. Soit $\mathcal{F}$ un filtre. On suppose qu'il existe des éléments de $\mathcal{F}$ qui sont des ensemble finis. Justifier l'existence d'un élément de $\mathcal{F}$ de cardinal minimal. Soit n_0 ce cardinal, et A un ensemble de tel cardinal ; montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$.
4. En déduire que pour tout ensemble E fini, tout filtre est principal. Que peut-on dire de l'application φ définie sur $\mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$, à valeurs dans $\mathcal{F}(E)$ (ensemble des filtres) et telle que $\varphi(A) = \mathcal{F}_A$ pour tout $A \subseteq E$? Combien a-t-on de filtres sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3\}$?
5. Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est pas un filtre principal.

Exercice (Filtres et relation d'ordre) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux filtres sur E, on note $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ si, et seulement si $\mathcal{F}$ est inclus dans $\mathcal{G}$. Vérifier que c'est une relation d'ordre. On dit que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre s'il est un élément maximal de $(\mathcal{F}(E), \leq)$.

1. Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles de E, alors $A \subseteq B$ si, et seulement si $\mathcal{F}_B \leq \mathcal{F}_A$.
2. L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ admet-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Expliciter l'élément, le cas échéant.
3. Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un ultrafiltre si, et seulement si A est un singleton. Quels sont les ultrafiltres d'un ensemble fini ?

4. Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si, et seulement pour tout A sous-ensemble de E, soit A, soit son complémentaire est dans $\mathcal{F}$.
5. Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si, et seulement pour tous A, B sous-ensembles de E tels que $A \cup B$ soit dans $\mathcal{E}$, on a soit A, soit B dans $\mathcal{F}$.
6. Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est pas un ultrafiltre, et qu'il est inclus dans aucun ultrafiltre trivial.