Colle du 15 février 2012 (MPSI3)

Exercice Soit f une application non nulle de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifie $f(AB) = f(A) \cdot f(B)$ pour toutes matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(A) \neq 0$ si, et seulement si A est inversible.

Exercice Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite qui vérifie une relation de récurrence d'ordre d (on peut prendre $d = 2$ ou 3, peu importe). On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n-d} \\ u_{n-d+1} \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne à d entrées. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$, ne dépendant pas de n, telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \geq 0$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par la relation de récurrence $u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} = 0$. Déterminer A dans ce cas, puis A^n pour tout n. En déduire une expression de u_n pour tout n.

Exercice Soit $M = \begin{pmatrix} 6 & -124 & -15 \\ 78 & 12 & 153 \\ -16 & 60 & -18 \end{pmatrix}$. Montrer que $M^3 = 0$. Déterminer les solutions du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 6x - 124y - 15z \\ y' & = & 78x + 12y + 153z \\ z' & = & -16x + 60y - 18z \end{array} \right.$$

Exercice Déterminer la matrice de $f \; : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to \quad Rn[X] \\ \quad P & \mapsto \quad P(X+1) \end{cases}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, et déterminer son inverse. En déduire, si on a une relation du type $a_d = \sum_{q=0}^{d} \binom{d}{q} b_q$ pour tout d entre 0 et n, une relation qui exprime b_d en fonction de a_d pour tout d entre 0 et n. En déduire le nombre de permutations sans point fixe dans $\mathfrak{S}_n$, et le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$, si $n \geq k$. En déduire le nombre de permutations sans point fixe dans $\mathfrak{S}_n$, et le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$ si $n \geq k$ (montrer d'abord que n^k égale la somme, pour $j = 1$ à n, du nombre de surjections de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ fois $\binom{n}{q}$).

Exercice Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Calculer U^2. Quel est le rang de U ? Son noyau ? Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à U. Trouver une base $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ de E telle que $f(\vec{e_1}) = n\vec{e_1}$ et $f(\vec{e_i}) = \vec{0}$ sinon.

Exercice Soit $G \subseteq M_n(K)$ un groupe pour le produit. Donner un exemple de tel groupe. Montrer que toutes les matrices ont même noyau et même image.