Colle du 15 février 2012 (MPSI1)

Exercice Soit f un endomorphisme de E, et F un supplémentaire de $\ker(f)$. Montrer que la restriction de f à F induit un isomorphisme de F sur $\mathrm{im}(f)$. En déduire le résultat suivant : il existe une unique application polynomiale P vérifiant $P(0) = 0$ et $P(t+1) - P(t) = Ct^{n-1}$ (C est une constante fixée). Ou encore : il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\geq 0}$ telle que $B_0 = 1$, $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_n = 0$ pour $n > 0$.

Exercice Montrer que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), ..., P(n)) \end{cases}$ est un isomorphisme. Quelle est son application réciproque ?

Exercice Si f est un endomorphisme de E, et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on note $P(f)$ l'endomorphisme $\sum_{k=0} a_k f^k$, où par convention $f^0 = id$. Vérifier que l'ensemble des polynômes d'endomorphisme (pour $\circ$) est bien une algèbre sur $\mathbb{C}$. On suppose que E est de dimension finie. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $P(f) = 0$.

On considère $P_{f,E}$ le plus petit polynôme (pour le degré) qui vérifie cette propriété. Montrer que si $P(f) = 0$, où P est un polynôme, alors $P_{f,E}$ divise P. Soit $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel qui vérifie $f(F) \subseteq F$ (autrement dit, $f \in \mathrm{L}(F)$). Montrer que $P_{f,F}$ divise $P_{f,E}$. En déduire que s'il existe un réel λ et un vecteur non nul $\vec{x}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, alors λ est une racine du polynôme $P_{f,E}$.

Montrer que f est inversible si, et seulement si le coefficient constant de $P_{f,E}$ est non nul.

Exercice Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une application linéaire, $\vec{a} \in H = \ker(f)$. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(\vec{x}) = \vec{x} + f(\vec{x})\vec{a}$. Vérifier que c'est bien linéaire. Montrer que $D = \mathrm{Im}(u - id) \subseteq H$. On dit que u est une transvection de droite D et d'hyperplan H. Notons $\tau(f,a)$ une telle transvection, dorénavant. Montrer que $\tau(f,a) \in \mathrm{GL}(E)$, et que si g est dans $\mathrm{GL}(E)$, alors $g\tau(f,a)g^{-1} = \tau(f \circ g^{-1}, g(a))$. En déduire que le centre Z de $\mathrm{GL}(E)$ est formé des applications linéaires $\vec{x} \mapsto \lambda\vec{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Exercice On appelle valeur propre d'un endomorphisme $f \in \mathrm{L}(E)$ un complexe tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ pour un vecteur non nul $\vec{x}$. Montrer que si E est de dimension finie, alors f a un nombre fini de valeurs propres.

Exercice Soit f un endomorphisme de E (de dimension finie). Montrer que $(\mathrm{im}(f^n))_{n\geq 0}$ et $(\ker(f^n))_{n\geq 0}$ sont respectivement décroissante et croissante pour l'inclusion. En déduire que si on a $\mathrm{im}(f^n) = \mathrm{im}(f^{n+1})$ pour un certain n, alors la suite stationne à partir de ce rang. De même pour $\ker(f^n)$.

Exercice Justifier que si $K \subseteq L$ est une suite de corps, alors L est un K-espace vectoriel. Si $K \subseteq L \subseteq M$ est une suite d'extensions de corps, montrer que $\dim_K M = \dim_L M \cdot \dim_K L$.

Si $K \subseteq L$, on dit que $x \in L$ est algébrique sur K s'il est annulé par un polynôme de $K[X]$, et qu'il est transcendant sinon. Montrer que x est algébrique sur K si, et seulement si $K[x] = K(x)$, si, et seulement si $\dim_K K[x] < +\infty$. En déduire que l'ensemble des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un corps. Montrer l'existence de nombres transcendants.