

## Colle du 1er février 2012 (MPSI3)

**Exercice** Soit  $S$  l'enveloppe convexe de  $n$  points distincts du plan, et  $\mathcal{E}$  un disque elliptique inclus dans  $S$ . Montrer que si  $\mathcal{E}$  contient un sommet de  $S$ , alors  $\mathcal{E}$  est dégénérée (c'est-à-dire réduite à un segment).

**Exercice** Montrer qu'une suite bornée qui admet une unique valeur d'adhérence converge.

**Exercice** Montrer qu'une suite de Cauchy réelle converge.

**Exercice** Démontrer le théorème suivant :

**Théorème 1 (Théorème du point fixe de Banach)** *Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow I$ . Si  $f$  est contractante, alors  $f$  admet un point fixe, et il est unique. De plus, si une suite est définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$ , alors elle a pour limite ce point fixe.*

**Exercice** Montrer qu'une suite convergente à valeurs entières est stationnaire.

**Exercice** Montrer qu'une suite qui vérifie une relation de récurrence de la forme  $u_{n+5} - 4u_{n+4} + 4u_{n+3} - u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n = 0$  est de la forme  $u_n = (\alpha n + \beta)2^n + \gamma + (\delta \cos(\frac{2\pi n}{3}) + \varepsilon \sin(\frac{2\pi n}{3}))$ .

**Exercice** Montrer que si  $f$  est une fonction continue positive décroissante sur  $\mathbb{R}$  et qui tend vers 0 en l'infini, alors  $\sum_{k=0}^n f(k) \sim \int_0^n f$  quand  $n \rightarrow \infty$ . En déduire un équivalent de la suite  $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})_{n \geq 1}$  au voisinage de l'infini.

**Exercice** Montrer que tout  $a$ ,  $a^n = o(n!)$ . Montrer la convergence de la suite  $(\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!})_{n \geq 0}$  pour tout  $a$ . On note  $e^a$  sa limite. On veut montrer que pour tout  $a$  rationnel non nul,  $e^a$  est irrationnel. Supposons qu'il soit rationnel, sous la forme  $\frac{\alpha}{\beta}$ , et soit  $n$  tel que  $n! > \alpha a^{2n+1}$ . Montrer que  $\beta \int_0^1 a^{2n+1} e^{ax} \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$  est un entier, et conclure. (Introduire  $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k+1} (-1)^k f^{(k)}(x)$ , et remarquer que l'intégrale est en fait  $[e^{ax} F(x)]_0^1$ )

**Exercice** Montrer que  $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2})_{n \geq 1}$  converge.

**Exercice** Montrer que  $(\exp(2i\pi\theta n))_{n \geq 0}$  converge si, et seulement si  $\theta$  est un entier.

**Exercice** , Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  la suite de points du plan euclidien définie par récurrence comme suit :  $M_0, M_1$  et  $M_2$  sont d'affixes respectives 1,  $j$  et  $j^2$ , et  $M_n$  est, pour tout  $n \geq 3$ , isobarycentre de  $M_{n-1}, M_{n-2}$  et  $M_{n-3}$ . Calculer la limite des affixes des  $M_n$ .