Colle du 25 janvier 2012 (MPSI3)

Exercice Montrer que la famille de suites $\{(2^n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}, (1)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ (dont on vérifiera la structure d'espace vectoriel réel).

Exercice Montrer que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel réel, et donner une base. Soit E un corps commutatif qui est un espace vectoriel réel, tel qu'il existe une base finie. Montrer que E égale $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (on admet que les polynômes réels s'écrivent toujours comme produits de polynômes de degré 1 ou 2).

Exercice Soit G un sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$ qui est un groupe pour la composition. Montrer que tous les éléments ont même noyau et même image.

Exercice Soit f un endomorphisme de E, et F un supplémentaire de $\ker(f)$. Montrer que la restriction de f à F induit un isomorphisme de F sur $\mathrm{im}(f)$. En déduire le résultat suivant : il existe une unique application polynomiale P vérifiant $P(0) = 0$ et $P(t+1) - P(t) = Ct^{n-1}$ (C est une constante fixée). Ou encore : il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\geq 0}$ telle que $B_0 = 1$, $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_n = 0$ pour $n > 0$.

Exercice Montrer que si $u \in \mathrm{GL}(E)$ laisse invariantes toutes les droites vectorielles de E, alors u est une homothétie.

Exercice Soit f une application linéaire de E, λ et μ deux complexes distincts et $\vec{x}$, $\vec{y}$ deux vecteurs de E tels que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ et $f(\vec{y}) = \mu\vec{y}$. Montrer que $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre. En déduire que $(x \mapsto e^{ax}, x \mapsto e^{bx})$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour $a \neq b$, et même question pour $(\cos, \sin)$.

Exercice Soit f un endomorphisme nilpotent, n le plus petit entier tel que $f^n = 0$. Montrer que la famille $(1, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre.

Exercice Montrer que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), ..., P(n)) \end{cases}$ est un isomorphisme. Quelle est son application réciproque ?

Exercice Montrer que les hauteurs d'un triangle se coupent en un seul point, et calculer ses coordonnées barycentriques (en fonction des sommets du triangle).

Exercice Résoudre l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sin\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\cdot f\right) = f$, d'inconnue f (infiniment dérivable).

Exercice Soit $X^2 + aX + b = (X - x_1)(X - x_2)$ un polynôme complexe, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Montrer que $\ker(f^2 + af + b) = \ker(f - x_1 id) \oplus \ker(f - x - 2id)$. En déduire l'expression générale d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant une récurrence linéaire du second degré, en fonction de n, ou de la solution d'une équation différentielle linéaire du second degré.

Exercice Si f est un endomorphisme de E, et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on note $P(f)$ l'endomorphisme $\sum_{k=0} a_k f^k$, où par convention $f^0 = id$. Vérifier que l'ensemble des polynômes d'endomorphisme (pour $\circ$) est bien une algèbre sur $\mathbb{C}$. On suppose que E est de dimension finie. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $P(f) = 0$.

Exercice Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une application linéaire, $\vec{a} \in H = \ker(f)$. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(\vec{x}) = \vec{x} + f(\vec{x})\vec{a}$. Vérifier que c'est bien linéaire. Montrer que $D = \mathrm{Im}(u - id) \subseteq H$. On dit que u est une transvection de droite D et d'hyperplan H. Notons $\tau(f, a)$ une telle transvection, dorénavant. Montrer que $\tau(f, a) \in GL(E)$, et que si g est dans $GL(E)$, alors $g\tau(f, a)g^{-1} = \tau(f \circ g^{-1}, g(a))$. En déduire que le centre Z de $GL(E)$ est formé des applications linéaires $\vec{x} \mapsto \lambda\vec{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Exercice On appelle valeur propre d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ un complexe tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ pour un vecteur non nul $\vec{x}$. Montrer que si E est de dimension finie, alors f a un nombre fini de valeurs propres.

Exercice Soit f un endomorphisme de E (de dimension finie). Montrer que $(\mathrm{im}(f^n))_{n\geq 0}$ et $(\ker(f^n))_{n\geq 0}$ sont respectivement décroissante et croissante pour l'inclusion. En déduire que si on a $\mathrm{im}(f^n) = \mathrm{im}(f^{n+1})$ pour un certain n, alors la suite stationne à partir de ce rang. De même pour $\ker(f^n)$.

Exercice Justifier que si $K \subseteq L$ est une suite de corps, alors L est un K-espace vectoriel. Si $K \subseteq L \subseteq M$ est une suite d'extensions de corps, montrer que $\dim_K M = \dim_L M \cdot \dim_K L$.

Si $K \subseteq L$, on dit que $x \in L$ est algébrique sur K s'il est annulé par un polynôme de $K[X]$, et qu'il est transcendant sinon. Montrer que x est algébrique sur K si, et seulement si $K[x] = K(x)$, si, et seulement si $\dim_K K[x] < +\infty$. En déduire que l'ensemble des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un corps. Montrer l'existence de nombres transcendants.