Colle du 18 janvier 2012 (MPSI3)

Exercice Montrer que la famille de suites $\{(2^n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}, (1)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ (dont on vérifiera la structure d'espace vectoriel réel).

Exercice Montrer que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel réel, et donner une base. Soit E un corps commutatif qui est un espace vectoriel réel, tel qu'il existe une base finie. Montrer que E égale $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (on admet que les polynômes réels s'écrivent toujours comme produits de polynômes de degré 1 ou 2).

Exercice Soit G un sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$ qui est un groupe pour la composition. Montrer que tous les éléments ont même noyau et même image.

Exercice Soit f un endomorphisme de E, et F un supplémentaire de $\ker(f)$. Montrer que la restriction de f à F induit un isomorphisme de F sur $\text{im}(f)$. En déduire le résultat suivant : il existe une unique application polynomiale P vérifiant $P(0) = 0$ et $P(t+1) - P(t) = Ct^{n-1}$ (C est une constante fixée). Ou encore : il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\geq 0}$ telle que $B_0 = 1$, $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_n = 0$ pour $n > 0$.

Exercice Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une application linéaire, $\vec{a} \in H = \ker(f)$. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(\vec{x}) = \vec{x} + f(\vec{x})\vec{a}$. Vérifier que c'est bien linéaire. Montrer que $D = \text{im}(u - id) \subseteq H$. On dit que u est une transvection de droite D et d'hyperplan H. Notons $\tau(f, \vec{a})$ une telle transvection, dorénavant. Montrer que $\tau(f, \vec{a}) \in \text{GL}(E)$, et que si g est dans $\text{GL}(E)$, alors $g\tau(f, \vec{a})g^{-1} = \tau(f \circ g^{-1}, g(\vec{a}))$. En déduire que le centre Z de $\text{GL}(E)$ est formé des applications linéaires $\vec{x} \mapsto \lambda\vec{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Exercice Montrer que si $u \in \text{GL}(E)$ laisse invariantes toutes les droites vectorielles de E, alors u est une homothétie.

Exercice Soit f une application linéaire de E, λ et μ deux complexes distincts et $\vec{x}$, $\vec{y}$ deux vecteurs de E tels que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ et $f(\vec{y}) = \mu\vec{y}$. Montrer que $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre. En déduire que $(x \mapsto e^{ax}, x \mapsto e^{bx})$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour $a \neq b$, et même question pour (cos, sin).

Exercice Soit f un endomorphisme nilpotent, n le plus petit entier tel que $f^n = 0$. Montrer que la famille $(1, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre.

Exercice Montrer que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to \quad \mathbb{R}^{n+1} \\ \quad P & \mapsto \quad (P(0), P(1), ..., P(n)) \end{cases}$ est un isomorphisme. Quelle est son application réciproque ?