Colle du 25 janvier 2012 (MPSI1)

Exercice Soit S l'enveloppe convexe de n points distincts du plan, et $\mathcal{E}$ un disque elliptique inclus dans S. Montrer que si $\mathcal{E}$ contient un sommet de S, alors $\mathcal{E}$ est dégénérée (c'est-à-dire réduite à un segment).

Exercice Montrer qu'une suite bornée qui admet une unique valeur d'adhérence converge.

Exercice Montrer qu'une suite de Cauchy réelle converge.

Exercice Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 (Théorème du point fixe de Banach) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$. Si f est contractante, alors f admet un point fixe, et il est unique. De plus, si une suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors elle a pour limite ce point fixe.*

Exercice Montrer qu'une suite convergente à valeurs entières est stationnaire.

Exercice Montrer qu'une suite qui vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+5} - 4u_{n+4} + 4u_{n+3} - u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n = 0$ est de la forme $u_n = (\alpha n + \beta)2^n + \gamma + \left(\delta \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)$.

Exercice Montrer que si f est une fonction continue positive décroissante sur $\mathbb{R}$, alors $\sum_{k=0}^{n} f(k) \sim \int_0^n f$ quand $n \to \infty$. En déduire un équivalent de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\geq 1}$ au voisinage de l'infini.

Exercice Montrer que tout a, $a^n = o(n!)$. Montrer la convergence de la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^n}{n!}\right)_{n\geq 0}$ pour tout a. On note e^a sa limite. On veut montrer que pour tout a rationnel non nul, e^a est irrationnel. Supposons qu'il soit rationnel, sous la forme $\frac{\alpha}{\beta}$, et soit n tel que $n! > \alpha a^{2n+1}$. Montrer que $\beta \int_0^1 a^{2n+1} e^{ax} \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ est un entier, et conclure. (Introduire $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k+1}(-1)^k f^{(k)}(x)$, et remarquer que l'intégrale est en fait $[e^{ax}F(x)]_0^1$)

Exercice Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geq 1}$ converge.

Exercice Montrer que $(\exp(2i\pi\theta n))_{n\geq 0}$ converge si, et seulement si θ est un entier.