Colle du 6 décembre 2011 (MPSI1)

Exercice Soit $\mathscr{C}$ une conique non vide, et M un point de cette conique. Montrer d'abord qu'il existe une bijection entre $\mathscr{C}$ et les droites du plan euclidien passant par l'origine, puis qu'il existe une paramétrisation rationnelle de $\mathscr{C} \setminus \{M\}$. Montrer que si les coefficients de la conique sont rationnels, et que la conique a un point à coordonnées rationnelles, alors elle en a une infinité.

Exercice Soit R le repère orthonormé traditionnel, et $\mathscr{C}$ une conique d'équation $x^2 - dy^2 = 1$ dans ce repère, où d est un entier naturel supérieur à 2. De quel type est la conique $\mathscr{C}$? Si M et N sont deux points de la conique qui ont pour coordonnées (x, y) et (x', y') dans R, montrer que $M(x, y)_R + N(x', y')_R = (M + N)(xx' + dyy', xy' + x'y)_R$ définit une loi de groupe commutatif sur la conique. Et si M et N sont à coordonnées (x, y) et (x', y') dans le repère porté par les asymptotes, que dire des coordonnées de $M + N$? En déduire un isomorphisme de groupes entre $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathcal{C}, +)$.

Si M et N sont deux points de la conique, soit R le point d'intersection autre que $(1, 0)$ entre la conique la droite passant par $(1, 0)$ et parallèle à (MN). Montrer que $R = M + N$.

Exercice Expliquer comment retrouver toutes les coniques connues en coupant un cône par un plan.

Exercice Discuter, selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, du genre de la conique d'équation $(1 - \lambda - \lambda^2)(x^2 + y^2) + (1 + 2\lambda)(x + y) - 2\lambda(1 + \lambda)xy - 1 = 0$.

Exercice Montrer que par cinq points du plan, il passe au moins une conique.

Exercice Montrer que six points A, B, C, A', B', C', dont trois ne sont jamais alignés, sont sur une même conique si et seulement si les intersections P de (AB') et (BA'), N, de (AC') et (CA') et M de (BC') et (CB') sont trois points alignés. Montrer comment construire géométriquement cette conique.

Exercice Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une hyperbole soit équilatère.

Exercice Soit C l'enveloppe convexe de n points s_1, …, s_n. Montrer que si $\mathcal{E}$ est un disque elliptique inclus dans C et contenant s_1, alors $\mathcal{E}$ est dégénérée (c'est-à-dire réduite à un segment).