# Colle du 11 décembre 2009

- Révision sur les fractions rationnelles.
- Fonctions usuelles : ln, fonctions exponentielles, fonctions puissance ; fonctions trigonométriques réciproques : Arcsin, Arccos, Arctan ; fonctions trigonométriques hyperboliques : ch, sh, th ; formules de trigonométrie hyperbolique ; fonctions hyperboliques réciproques : Argch, Argsh, Argth
- Fonctions numériques d'une variable réelle : le programme officiel stipule que toutes les fonctions sont définies sur un intervalle $I$ de $R$ contenant au moins deux points.
- Définitions : Structure d'algèbre de $\mathbb{R}$. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
- Valeur absolue d'une fonction, inf et sup de 2 fonctions
- Fonction monotone, strictement monotone
- Fonction bornée
- Extremum d'une fonction
- Fonction paire, impaire, périodique
- Fonction en escalier sur un segment, continue affine par morceaux sur un segment
- Fonction lipschitzienne

**Exercice** Démontrer le théorème suivant : soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application $k$-lipschitzienne avec $k < 1$ (dite contractante). Montrer que $f$ admet un unique point fixe, et que toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.

Montrer de plus qu'on a : $|u_n - x| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$. Montrer que la conclusion du théorème reste vrai si on suppose cette fois que c'est $f^p$ qui est contractante, pour un certain $p \geq 1$.

**Exercice** Soit $a > 0$. Sans utiliser l'application exponentielle, montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone qui vérifie $f(x + y) = f(x)f(y)$ et $f(1) = a$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$. Montrer qu'elle est dérivable, et calculer sa dérivée ainsi que celle de son application réciproque.

**Exercice** On définit, pour $F$ fermé, $L(F, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de $F$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que pour $x_0$ et $y_0$ fixés, il existe $(f_-, f_+)$ dans $L(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ tel que $f_-(x_0) = f_+(x_0) = y_0$, et tel que pour tout $f \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $f(x_0) = y_0$, on a $f_- \leq f \leq f_+$. Puis : soit $f_0 \in L(F, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $f_-, f_+$ dans $L(\mathbb{F}, \mathbb{R})$ qui prolongent $f_0$ tels que pour tout $f \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui prolonge $f_0$, on a $f_- \leq f \leq f_+$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice** Calculer $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kx)$.

**Exercice** On pose $l_n(p) = \sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k}$ pour $n, p \in \mathbb{N}^*$. Utiliser cette suite pour montrer l'existence d'une fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. On remarquera par exemple $\frac{1}{p+1} \leq \lim_{n\infty} l_n(p+1) - \lim_{n\infty} l_n(p) \leq \frac{1}{p}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.