Colle du 4 décembre 2009

- Reprise du programme précédent sur les polynômes
- Théorème de d'Alembert-Gauss (admis).
- Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
- Corps $K(X)$ des fractions rationnelles sur un sous-corps de $\mathbb{C}$: Représentant irréductible . Degré, pôles et racines. Partie entière.
- Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples ; application à $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$.

Exercice Montrer que $X^n + Y^n = Z^n$ n'a pas de solutions non triviales pour $X, Y, Z \in K[X]$ premiers entre eux.

Exercice Soit Φ_n le polynôme unitaire dont les racines simples sont les générateurs du groupe $\{\zeta \in \mathbb{C} | \zeta^n = 1\}$. Calculer Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4. Quel est le degré de Φ_n ? Montrer que $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$, et en déduire que les Φ_n sont dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice Montrer que si P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, alors les zéros de P dans $\mathbb{C}$ sont tous simples.

Exercice On pose $P = X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$. Si $a^2 - 4b > 0$, on note x_1 et x_2 les racines. Montrer que $X - x_1$ et $X - x_2$ sont premiers entre eux. En déduire que les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ s'écrivent de manière unique comme la somme d'une solution de $y' - x_1 y = 0$ et de $y' - x_2 y = 0$. Que dire du cas $a^2 - 4b < 0$? Résoudre l'équation dans le cas $a^2 - 4b = 0$.

Exercice Montrer que $K[X]$ est un anneau principal.

Exercice Soit R un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que $P \sim Q \Leftrightarrow R | P - Q$ est une relation d'équivalence, qu'il existe un morphisme d'anneau injectif i de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}[X]/\sim$. Pour alléger les notations, on identifie $i(a)$ et a pour tout $a \in \mathbb{Q}$. Montrer que R admet une racine dans $\mathbb{Q}$.

Exercice Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit $\varphi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$ par $\varphi(P) = P(\alpha)$. Montrer, à l'aide de ce morphisme, que soit il existe un polynôme minimal[1] μ_α de $\mathbb{Q}[X]$, irréductible, tel que $\mu_\alpha(\alpha) = 0$ (cas algébrique), soit α est seulement annulé par le polynôme nul (cas transcendant). Montrer que $\mathbb{Q}[X]/\sim$ est isomorphe (en tant qu'anneau) à $\mathrm{im}(\varphi)$, où $\sim$ est la relation d'équivalence $P \sim Q \Leftrightarrow P - Q \in \ker(\varphi)$. En déduire que $X \in \mathbb{Q}(X)$ est transcendant sur $\mathbb{Q}$.

Exercice Écrire $\frac{\sin(nt)}{\sin(t)^n}$ comme polynôme de l'indéterminée $\mathrm{cotan}(t)^2$, et en déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice On appelle $K(x)$ le plus petit corps contenant K et x, et $K[x]$ le plus petit anneau contenant K et x. À quelle condition on a $K(x) \simeq K[x]$? À quelle condition $K[x] \simeq K[X]$?

1. minimal au sens que si un autre polynôme P annule α, alors μ_α divise P.

Exercice Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Décomposer $\frac{P'}{P}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$, et en déduire un résultat sur les racines de P'.

Question de cours Formule de Taylor ?

Question de cours Interpolation de Lagrange ?

Question de cours PGCD de deux polynômes ?