Colle du 20 novembre 2009

- Étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$
- Théorème de Bolzano-Weierstrass.
- Limite infinie d'une suite réelle.
- Relations de comparaison :
- A. Négligeabilité, prépondérance, domination
- Propriétés - exemple fondamental : comparaison des suites $[\ln(n)]^a$, n^b , k^n , $n!$, n^n pour $a > 0, b > 0, k > 1$.
- B. Equivalence : définition, c'est une relation d'équivalence, propriétés liées à la convergence, propriétés opératoires.

Exercice Montrer que $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$ si, et seulement si, $u_n \sim v_n$ et u_n est bornée.

Exercice Montrer que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$ si, et seulement si, $u_n \sim v_n$ et $u_n \not\to 1$.

Exercice On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant ceci : quelque soit φ l'extractrice, si $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge, alors sa limite est l. En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.

Exercice

Définition 1 *On appelle suite de Cauchy une suite d'éléments tels que :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad ; \quad \forall n > N \quad \forall p > 0 \quad |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$$

Montrer qu'une suite réelle est de Cauchy si, et seulement si, elle est convergente. En déduire une nouvelle preuve du théorème des segments emboîtés.

Exercice (Si Cauchy a été fait) Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 *(Théorème du point fixe de Banach) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$. Si f est contractante*[1]*, alors f admet un point fixe, et il est unique. De plus, si une suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors elle a pour limite ce point fixe.*

Exercice Montrer que si $u_n \sim v_n$, et si $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\geq 0}$ est une suite divergente, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$ (pour des suites de signe constant !). En déduire le lemme de Césaro.

Exercice Montrer que si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction positive et décroissante, alors $\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$. Application à $f(t) = \frac{1}{t}$. Avec la même méthode, que peut-on dire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$?

Exercice Étudier la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : \begin{cases} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & a \cdot x(1-x) \end{cases}$ avec $a > 0$. Idem avec $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. C'est-à-dire : il existe $k < 1$ tel que pour tous x, y, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

Exercice la définition de la continuité en un point a pour une fonction f est :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad ; \quad |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

En d'autres termes, $x \to a$ implique $f(x) \to f(a)$. Le α dépend ici de a, et ce n'est pas le cas pour la continuité uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad ; \forall x, y \quad |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Montrer que si f est continue sur un *segment*, alors f est uniformément continue. Idem avec : f continue sur $[0, 1]$, pour ε *fixé*, alors on peut trouver un réel α tel que pour tous x, y dans $[0, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \alpha(x-y)^2$.

Question de cours Comparer les suites $[\ln(n)]^a$, n^b , k^n , $n!$, n^n pour $a > 0, b > 0, k > 1$.

Question de cours Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Question de cours Définir $\sim$ et montrer que c'est une relation d'équivalence.