Colle du 13 novembre 2009

- Le corps des réels : Propriétés caractéristiques du corps $\mathbb{R}$. Règles usuelles sur les inégalités. Valeur absolue d'un réel. $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas l'axiome de borne supérieure. Partie entière d'un réel. Intervalles de $\mathbb{R}$. Tout intervalle de $\mathbb{R}$ a une intersection non vide avec $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Le groupe $\mathbb{R}_+^*$.
- Inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski.
- Suites réelles et complexes : Définition d'une suite ; d'une suite récurrente d'ordre k ; sous-suite ; suite majorée, minorée ; suite monotone, strictement monotone, périodique ; structure de l'ensemble des suites réelles, réelles bornées. Suite arithmétique, géométrique.
- Suites réelles vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 1 ou 2.
- Définition de la convergence et divergence d'une suite.
- Convergence et divergence d'une suite réelle. Théorèmes de calcul de limites. Suites adjacentes, théorème des segments emboîtés.

Exercice Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$. Déterminer u_n pour tout n.

Exercice Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$ et $u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$. Déterminer u_n pour tout n.

Exercice On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant ceci : si $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge, alors sa limite est 0, quelque soit φ l'extractrice (toute autre valeur fait l'affaire). En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Exercice Déterminer $(u_n)_{n\geq 0}$ qui vérifie $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.

Exercice Montrer qu'un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$, soit dense.

Question de cours Démontrer le théorème des segments emboités.

Question de cours Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.