

Colle du 23 octobre 2009

–

Exercice Soit \mathcal{C} une conique (c'est-à-dire une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$, une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou une parabole d'équation $y = ax^2$). Montrer que s'il existe un point $(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \cap \mathcal{C}$, alors il en existe une infinité.

Exercice Exprimer $\frac{\sin(nx)}{\sin(x)^n}$ en fonction de puissances de $\cotan(x)$, et en déduire que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice Calculer $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt)$.

Exercice On note \mathcal{H} l'ensemble des complexes de partie imaginaire strictement positive. Montrer que si a, b, c et d sont des entiers tels que $ad - bc = 1$, alors $z \in \mathcal{H} \Rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{H}$.

Exercice Montrer que tout polynôme non constant à coefficients dans \mathbb{C} admet au moins une racine.

Exercice Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{C}$, il existe une application continue $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\sigma(0) = x$ et $\sigma(1) = y$. De même si on remplace \mathbb{C} par \mathbb{C}^* , puis par \mathbb{C} privé d'un nombre fini de points.

Exercice Démontrer que \mathbb{C} et $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ sont isomorphes en tant que corps ($\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence $P \sim Q \Leftrightarrow P - Q \in (X^2 + 1)$).

Exercice On admet que $\exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{U} \\ \theta & \mapsto \exp(i\theta) \end{cases}$ est surjective. Montrer alors que dans un triangle ABC rectangle en B , $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{BA}{BC}$. De même, trouver une formule pour $\sin(\widehat{BAC})$.

Exercice Montrer que l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité (dans \mathbb{C}) est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc est cyclique. Quels sont ses générateurs? Justifier, par un argument de théorie des groupes, qu'il n'y a qu'une seule racine réelle pour n impair.

Question de cours Expressions de \cos et \sin en fonction de la tangente de l'angle moitié? Et de l'exponentielle?

Question de cours Méthode de résolution d'une équation polynomiale complexe du second degré.

Question de cours Théorème de l'angle au centre.