Colle du 9 octobre 2009

- Groupes monogènes, groupes cycliques
- L'exemple de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Anneau : définition, propriétés de calcul, idéal. Morphisme d'anneaux.
- Arithmétique : Notion de PGCD, PPCM de deux entiers, nombre premier, théorèmes de Gauss et Bézout, décomposition en produit de facteurs premiers.

Exercice Montrer que l'ensemble des morphismes d'un groupe G dans $\mathbb{C}^*$ forme un groupe. Le déterminer dans le cas d'un groupe monogène ou cyclique.

Exercice Montrer que $\mathbb{Q}$ n'a pas un nombre fini de générateurs.

Exercice Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes : Toute suite croissante d'idéaux est stationnaire, tout idéal a un nombre fini de générateurs, et tout ensemble non vide d'idéaux admet un élément maximal.

Soit A un anneau dans lequel ces propriétés sont vérifiées (exemples ?). Vérifier l'existence d'une décomposition en facteurs irréductibles pour tout élément de A (un élément est irréductible si $p = ab$ implique a ou b inversible).

Exercice On appelle idéal premier un idéal I tel que si $xy \in I$, alors $x \in I$ ou $y \in I$. Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$?

Soit $\sqrt{I} = \{x \in A | \exists n \geq 1; x^n \in I\}$. Montrer que c'est idéal, et que $\sqrt{(0)}$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de A.

Exercice Montrer que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}, +, *)$ est un anneau commutatif, où $f*g$ est défini par $(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \sum_{ij=n} f(i)g(j)$. Élément neutre pour $*$?

Montrer que $\mu * 1 = e$ et $\Lambda * 1 = e$, où $\mu(n) = (-1)^r$, $n = \prod p_i$, 0 sinon, et $\Lambda(n) = \ln(p)$ si $n = p^a$, $a \geq 1$, 0 sinon.

On note $\varphi(n)$ l'ensemble des entiers entre 1 et n premiers avec n. Montrer que $\varphi(n) = \mathrm{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. En déduire que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux. Montrer que $\varphi * 1 = id$.

Exercice Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

Exercice Soit $S(n)$ la somme des diviseurs de n. Montrer que $S(n) \leq n\ln(n)$.

Exercice Montrer qu'il existe un isomorphisme d'anneaux entre $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour m et n premiers entre eux, puis un isomorphisme de groupes entre $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^*$ et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Montrer que si m et n ne sont pas premiers entre eux, ces groupes ne sont jamais isomorphes.

Expliciter l'isomorphisme de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$. Déterminer les entiers n tels que $n \equiv 2 \mod 15$ et $m \equiv 4 \mod 17$.

On note $\varphi(n)$ l'ensemble des entiers entre 1 et n premiers avec n. Montrer que $\varphi(n) = \mathrm{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. En déduire que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux, et en déduire une formule pour $\varphi(n)$ pour tout n.

Question de cours

Question de cours

Question de cours