Colle du 2 octobre 2009

- Reprise du programme précédent sur le dénombrement et les groupes.
- Morphisme de groupes
- Le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations : définition - orbite d'un élément par une permutation - cycles et transpositions - décomposition d'une permutation en cycles et transpositions - signature d'une permutation.

Exercice Construire $\mathbb{Z}$ à l'aide de relations d'équivalence sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Idem avec $\mathbb{Q}$ (à l'aide de relations d'équivalence sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$).

Question dans le cas où l'élève déchire : construire $\mathbb{C}$ à l'aide d'une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice Montrer que si $f : G \to H$ est un morphisme de groupes, alors $\operatorname{card}\ker f \cdot \operatorname{card} f(G) = \operatorname{card} G$.

Exercice Montrer que si H est un sous-groupe de G, alors $x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ est une relation d'équivalence sur G. On note G/H l'ensemble des classes d'équivalence.

Montrer que si G est un groupe commutatif, alors G/H a également une structure de groupe pour une loi proche de celle de G.

Application à $G = \mathbb{Z}$. Que reconnait-on ? Montrer que $\{id, (1234), (13)(24), (1432)\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Si l'élève déchire : montrer que si G n'est pas supposé commutatif, alors G/H a une structure de groupe pour la loi induite, pourvu que $ghg^{-1} \in H$ pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$. Vérifier que c'est toujours le cas avec le noyau d'un morphisme.

Toujours s'il déchire : Si $f : G \to H$ est un morphisme de groupes, montrer l'existence d'un isomorphisme entre $G/\ker(f)$ et H.

Exercice Soit $\mathbb{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions, où les lois sont données par les formules $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Vérifier que c'est effectivement un groupe, et donner tous ses sous-groupes.

Exercice σ est un cycle de longueur n. Combien de cycles apparaissent dans la décomposition en supports disjoints de σ^k, $k \in \mathbb{N}$?

Exercice On appelle dérangement une permutation sans point fixe, c'est-à-dire telle que $\sigma(i) \neq i$ pour tout i. Calculer le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un groupe pour l'addition. Quelle forme ont ses sous-groupes ?

Exercice Décomposer $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 7 & 9 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

Question de cours Démontrer le théorème de Lagrange (Demander si l'utilité des relations d'équivalence est comprise).

Question de cours Définition de la signature d'une permutation, et comment la calculer (Demander si les notations pour les permutations sont comprises).

Question de cours Définition d'un isomorphisme de groupes, et exemples (Demander si la notion est parlante).