Colle du 11 juin 2010

Exercice Soit D_n le groupe diédral, *i.e.* l'ensemble des isométries du plan qui laissent stable le polygone régulier dont les sommets sont les racines n-ièmes de l'unité (on identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$). Déterminer ses générateurs. Trouver un isomorphisme entre D_n et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ muni d'une loi bien choisie. Montrer que $D_3 \simeq \mathfrak{S}_3$.

Exercice Soit E un sous-ensemble du plan euclidien. Un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est constructible en un pas à partir de E si $(x, y) \in E$, ou si (x, y) est l'intersection de deux objets quelconques parmi :

- l'ensemble des droites passant par deux points distincts de E ;
- l'ensemble des cercles centrés en un point de E, et dont le rayon est la distance entre deux points de E.

On note $C_1(E)$ l'ensemble des points constructibles en un pas à partir de E, et de manière générale $C_{n+1}(E)$ est l'ensemble des points constructibles en un pas à partir de $C_n(E)$ (définition récurrence). On dit qu'un réel x est constructible si $(x, 0)$ appartient à $C_n(\{(0, 0), (1, 0)\})$ pour un certain n.

Montrer que l'ensemble des nombres constructibles est un corps, et que la racine d'un réel positif constructible est constructible.

Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$ est constructible, alors $\mathbb{Q}(\alpha)$ est de dimension une puissance de 2 sur $\mathbb{Q}$. En déduire que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.

Exercice Soit $C \subseteq \mathbb{R}^3$ l'ensemble des sommets d'un cube centré en $\vec{0}$ et de côté 1. On veut trouver le nombre d'isométries f telles que $f(C) = C$. On remarque ces isométries forment un groupe G.

Montrer que si f est une telle isométrie, elle envoie une diagonale sur une autre diagonale. Ainsi, l'application $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ telle que $\varphi(f)(x, -x) = (f(x), f(-x))$ est bien définie (X est l'ensemble des diagonales). Montrer que φ est un morphisme de groupes.

Montrer que si $d \in X$, alors

$$\mathrm{card}(G) = \mathrm{card}(\{\varphi(f)(d), f \in G\}) \cdot \mathrm{card}(\{f \in G | \varphi(f)(d) = d\}).$$

En déduire $\mathrm{card}(G)$.